

Partikel Dirac dalam Sumur Potensial Dinamis

Yuant Tiandho*

Fakultas Rekayasa Industri, Universitas Telkom
Jl. Telekomunikasi No. 1, Terusan Buah Batu, Bandung, Indonesia

*e-mail: yuanttiandho@gmail.com

Abstract

Infinite square well potential is one of the most elementary quantum mechanical system. The calculation of this case is not too complicated, however, it can show the differences between quantum world and classical world with clearly. In this letter, we expand the discussion about the infinite square well potential for dynamic potential well by involving relativistic corrections. The dynamic potential is defined as potential wall that depend on time because the potential can moving with constant velocity. The Dirac equation is used to describe condition in the potential well. By this consideration, we hope the result will be useful in the development of nanoelectronic devices. To obtain solution of probability density of Dirac particles that depend on space and time, we transform the Dirac equation into hyperbolic coordinates and the differential equations can be solved by separation variables method.

Keywords: quantum relativistic, Dirac equation, time dependent potential

PENDAHULUAN

Kajian tentang partikel dalam sumur potensial tak hingga (non-relativistik) merupakan permasalahan yang umum dipelajari untuk memahami persamaan Schrodinger. Pembahasan ini cukup sederhana dan dapat memberikan aproksimasi yang cukup baik dari beberapa permasalahan untuk sistem kuantum (Zettili, 2009). Tetapi apabila pembahasan diperluas untuk potensial yang bergerak atau potensial yang bergantung waktu maka hal ini menjadi jauh lebih kompleks dan lebih sulit. Kasus ini pertama kali diusulkan oleh Fermi untuk mempelajari sinar kosmik yang dipercepat (Fermi, 1949). Beberapa metode yang telah dilakukan untuk menyelesaikan kasus potensial yang bergantung pada waktu diantaranya adalah: path integral (Chetouani

& Guechi, 1989), second quantization (Oh, et al., 1989), representasi Heisenberg (Ji, et al., 1995), metode invarian (Lewis Jr. & Riesenfeld, 1969), dan transformasi Lorentz (Hamil & Chetouani, 2016).

Adapun untuk permasalahan sumur potensial dinamis yang melibatkan koreksi relativistik saat ini belum begitu banyak dipelajari. Padahal tinjauan tersebut kelak akan sangat bermanfaat dalam berbagai aplikasi, khususnya dalam divais nanoelektronik seperti *graphene*. Pembawa muatan dalam *graphene* mengikuti dinamika pseudorelativistik dari partikel Dirac (Savel'ev, et al., 2012). Sehingga beberapa konsekuensi dari hal ini misalkan adalah terjadinya fenomena *Klein tunneling* yang awalnya hanya dikenal dalam teori mekanika kuantum relativistik (Katsnelson, et al.,

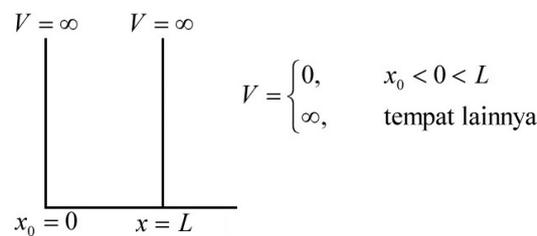
2006). Berdasarkan hal tersebut, maka dengan mempelajari kasus sumur potensial dinamis untuk partikel Dirac (relativistik) diharapkan dapat menambah referensi untuk proses rekayasa material *graphene* atau berbagai divais nanoteknologi selanjutnya.

Di dalam makalah ini, sumur potensial dinamis dideskripsikan sebagai suatu sumur potensial tak berhingga yang salah satu dindingnya dapat bergerak dan partikel Dirac diasumsikan berada didalamnya. Kami menggunakan transformasi ke dalam koordinat hiperbolik agar persamaan Dirac dapat diselesaikan secara analitis menggunakan metode separasi variabel. Solusi yang diperoleh dari kajian ini adalah gambaran rapat probabilitas partikel Dirac

dalam sumur potensial sebagai fungsi ruang dan waktu. Di dalam pembahasan selanjutnya makalah ini menggunakan sistem satuan *natural unit* dimana $\hbar = c = 1$.

PARTIKEL DIRAC DALAM SUMUR POTENSIAL STATIS

Sumur potensial digambarkan sebagai suatu daerah yang dibatasi oleh suatu dinding potensial tak berhingga dengan bagian dalamnya tidak terdapat potensial eksternal. Di dalam sumur, kondisi partikel Dirac dapat dipandang berada pada keadaan bebas (*free particle*). Karena dinding potensial memiliki nilai yang sangat besar maka efek tunneling tidak akan muncul. Adapun skema dari sumur potensial ditunjukkan oleh Gambar 1.



Gambar 1. Skema sumur potensial statis

Untuk meninjau kondisi partikel Dirac tak bermassa di dalam sumur potensial digunakan persamaan Dirac sebagai berikut,

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0 \tag{1}$$

dimana γ^μ adalah matriks gamma yang memenuhi hubungan $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \times I$ dengan $\eta^{\mu\nu}$ adalah invers metrik

Minkowskian dan I adalah matriks identitas. Terdapat banyak variasi matriks gamma dan di sini kami memilih matriks gamma sebagai,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Untuk memperoleh solusi dari persamaan tersebut, maka dapat dilakukan sedikit modifikasi persamaan,

$$\gamma_\nu \partial^\nu (\gamma^\mu \partial_\mu \psi) = 0 \quad (3)$$

$$\gamma_\nu \gamma^\mu (\partial^\nu \partial_\mu \psi) = 0 \quad (4)$$

Pada ruang-waktu Minkowskian perkalian antara matriks gamma dengan invers-nya akan menghasilkan nilai 1 jika $\mu = \nu$ dan akan bernilai 0 jika $\mu \neq \nu$. Selain itu, perkalian antara turunan kovarian dan kontravariannya memenuhi sifat operator d'Alembert, \square .

$$2\delta_\nu^\mu (\partial^\nu \partial_\mu) \psi = 0 \quad (5)$$

$$\square \psi = 0 \quad (6)$$

Operator d'Alembert merupakan generalisasi dari operator Laplacian yang berlaku tidak hanya untuk koordinat 3D, melainkan juga untuk koordinat ruang-waktu. Secara eksplisit operator d'Alembert didefinisikan

sebagai, $\square \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$. Bentuk persamaan

Dirac untuk partikel bebas dalam pers. (6) memiliki bentuk yang identik dengan persamaan Klein-Gordon yang berlaku untuk partikel tak berspin. Untuk tinjauan non-relativistik tampak bahwa solusi persamaan Dirac akan kembali pada bentuk persamaan Schrodinger.

Secara ansatz, fungsi gelombang ψ

dapat dinyatakan sebagai $\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix}$. Tetapi

karena komponen χ dan ξ akan menghasilkan solusi yang analogi maka

hanya akan dikaji solusi untuk komponen χ saja. Secara umum fungsi gelombang partikel Dirac dapat diuraikan dalam komponen waktu dan ruangnya,

$$\chi = T(t) X(x) \quad (7)$$

Definisi ini dipilih agar persamaan Dirac pada pers. (6) dapat diselesaikan secara sederhana dengan menggunakan metode separasi variabel. Melalui substitusi pers. (7) dalam pers. (6) dan membaginya dengan TX maka akan diperoleh,

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

Kemudian dengan menyatakan,

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -m^2 \quad (9)$$

Maka dapat diperoleh solusi dari persamaan diferensial untuk fungsi gelombang komponen waktu secara umum adalah,

$$T(t) = C_1 \exp[imt] + C_2 \exp[-imt] \quad (10)$$

Kedua suku pada solusi di atas (eksponensial positif dan negatif) berkaitan dengan partikel (eksponensial negatif) dan anti-partikel (eksponensial positif). Adapun solusi untuk komponen ruang dapat dinyatakan sebagai,

$$X(x) = D_1 \cos[mx] + D_2 \sin[mx] \quad (11)$$

Dengan menerapkan syarat batas yaitu pada dinding potensial $x=0$ dan $x=L$ tidak terdapat partikel Dirac, maka solusi komponen ruang di atas dapat direduksi sebagai,

$$X(x) = D \sin mx \quad (12)$$

dan diperoleh $m = \frac{n\pi}{L}$ dimana $n = 1, 2, 3, \dots$

Dengan demikian, secara lengkap fungsi gelombang dari partikel dan anti-partikel Dirac adalah,

$$\begin{aligned} \chi_n^- &= C_n^- \exp(-imt) \sin(mx) \\ \chi_n^+ &= C_n^+ \exp(imt) \sin(mx) \end{aligned} \quad (13)$$

Di dalam persamaan Dirac persamaan kontinuitas didefinisikan sebagai,

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

Tidak seperti persamaan Schrodinger, dimana $\rho = \psi^* \psi$, dalam persamaan Dirac rapat probabilitas dan rapat arus didefinisikan oleh,

$$\rho = i(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) \quad (15)$$

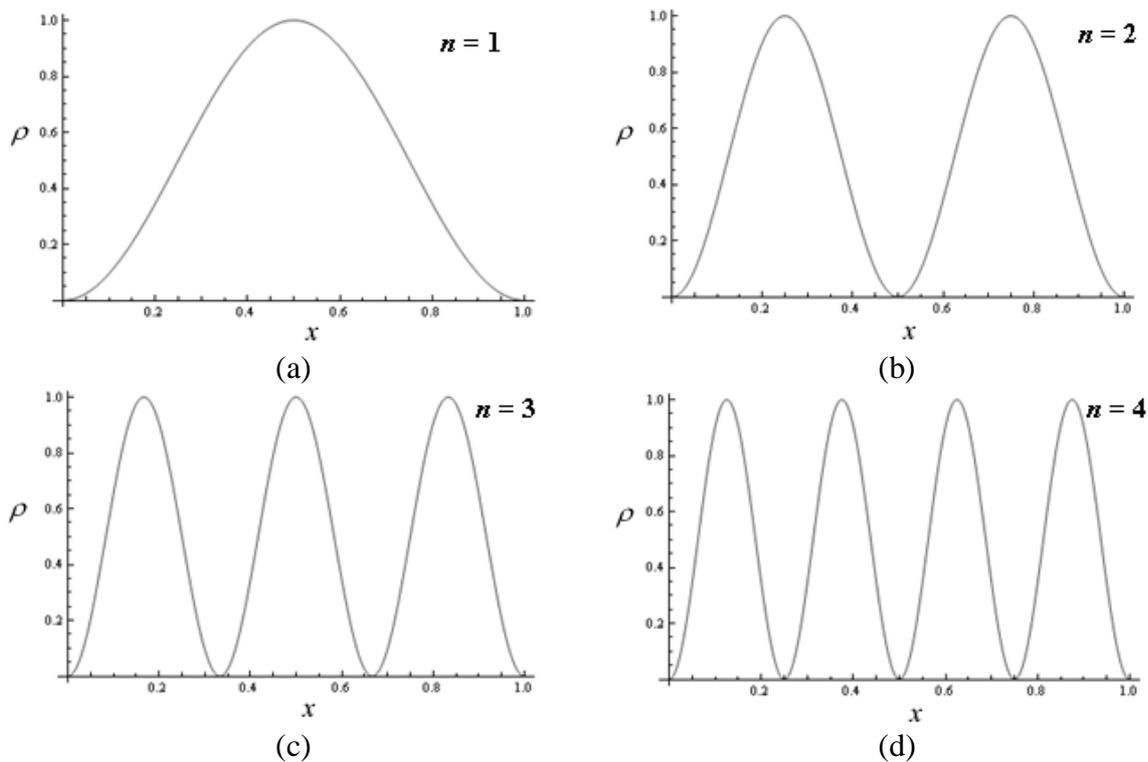
$$J^\mu = i(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

Sehingga dengan asumsi rapat arus $J=0$ maka rapat probabilitas partikel dan antipartikel,

$$\rho^\pm = \pm |C_n^\pm|^2 m \sin^2(mx) \quad (16)$$

Dengan melakukan normalisasi rapat probabilitas fungsi gelombang di atas maka kami dapat menyimpulkan bahwa konstanta C_n adalah,

$$C_n^\pm = \sqrt{\frac{2}{mL}} \quad (17)$$



Gambar 2. Rapat probabilitas partikel χ_n^- pada empat keadaan terendah dalam sumur potensial ($L = 1$).

Sehingga secara eksplisit fungsi gelombang dalam pers. (13) dapat dituliskan sebagai,

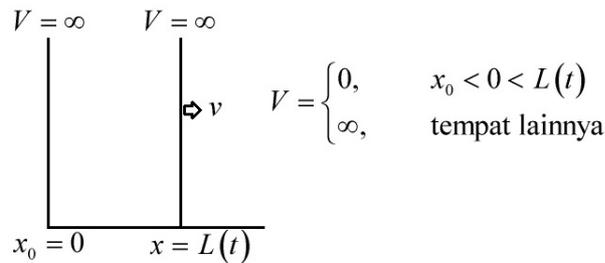
$$\chi_n^\pm = \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \exp\left[\pm \frac{in\pi t}{L}\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (18)$$

Apabila rapat probabilitas yang telah diperoleh dalam persamaan (16) diplot dalam grafik sebagai fungsi ruang maka tampak seperti pada Gambar 2. Jika diperhatikan hasil yang telah diperoleh ini memiliki bentuk grafik yang analogi dengan solusi dari

rapat probabilitas untuk persamaan Schrodinger.

PARTIKEL DIRAC DALAM SUMUR POTENSIAL DINAMIS

Sumur potensial tak berhingga dinamis yang ditinjau dalam makalah ini adalah sumur potensial dengan salah satu dindingnya bergerak secara konstan dengan kecepatan v . Secara sederhana skema dari kondisi tersebut tampak pada Gambar 3.



Gambar 3. Skema sumur potensial tak berhingga non-statis dengan kecepatan v .

Agar persamaan Dirac dapat diselesaikan dengan metode separasi variabel maka dibutuhkan transformasi koordinat (t, x) menjadi koordinat hiperbolik (α, β) yang didefinisikan sebagai,

$$\begin{aligned} \alpha\beta = t + x &\rightarrow \beta d\alpha + \alpha d\beta = dt + dx \\ \frac{\alpha}{\beta} = t - x &\rightarrow \frac{d\alpha}{\beta} - \alpha \frac{d\beta}{\beta^2} = dt - dx \end{aligned} \quad (19)$$

Sehingga dengan mengalikan kedua persamaan di atas maka dapat diperoleh,

$$d\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} d\beta^2 = dt^2 - dx^2 \quad (20)$$

dan interval garis dapat dituliskan sebagai,

$$ds^2 = d\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} d\beta^2 \quad (21)$$

Berdasarkan definisi interval garis di atas maka dapat disimpulkan metrik tensor dan invers metrik tensornya adalah,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha^2}{\beta^2} \end{pmatrix}; \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Karena telah dilakukan transformasi ke dalam koordinat hiperbolik maka untuk menghitung solusi partikel Dirac (tak bermassa) dalam sumur potensial tak berhingga non-statis digunakan persamaan

Dirac yang berlaku untuk sembarang koordinat yaitu,

$$\tilde{\gamma}^\mu D_\mu \psi = 0 \quad (23)$$

dimana $\tilde{\gamma}^\mu = e_a^\mu \gamma^a$ dengan e_a^μ adalah tetrad yang memenuhi hubungan antara metrik $g_{\mu\nu}$

dengan metrik Minkowski, $g_{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta_{ab}$.

Adapun turunan kovarian didefinisikan oleh

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \quad \text{dengan} \quad \omega_\mu^{ab}$$

adalah koneksi spin dan $\sigma_{ab} = [\gamma_a, \gamma_b]$. Berdasarkan

definisi metrik tensor pada pers. (22) maka tetrad dan inversnya dapat dituliskan sebagai,

$$e_\mu^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \\ & \beta \end{pmatrix}; \quad e_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \\ & \alpha \end{pmatrix} \quad (24)$$

dan matriks gamma $\tilde{\gamma}^\mu$ diberikan oleh,

$$\tilde{\gamma}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

dimana matriks gamma tersebut memenuhi

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I$$

Seperti pada kasus sumur potensial statis, persamaan Dirac pada pers. (23) juga dapat dituliskan sebagai,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_\nu \tilde{\gamma}^\mu (D^\nu D_\mu \psi) &= 0 \\ \tilde{\gamma}_\nu \tilde{\gamma}^\mu \nabla^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

sehingga $D^\nu D_\mu$ dapat didefinisikan sebagai operator Laplace-Beltrami yang merupakan generalisasi dari operator Laplace dan didefinisikan oleh,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu f) \quad (27)$$

dengan $g = \det g_{\mu\nu}$. Dengan demikian operator Laplace-Beltrami koordinat (α, β) adalah,

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\alpha} \partial_\alpha (\alpha \partial_\alpha \psi) - \frac{\beta}{\alpha^2} \partial_\beta (\beta \partial_\beta \psi) \quad (28)$$

Secara ansatz fungsi gelombang ψ dapat didefinisikan memiliki dua komponen

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} \quad \text{sehingga persamaan Dirac di atas}$$

secara eksplisit dapat dituliskan sebagai,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \partial_\alpha (\alpha \partial_\alpha \chi) - \frac{\beta}{\alpha^2} \partial_\beta (\beta \partial_\beta \chi) &= 0 \\ \frac{1}{\alpha} \partial_\alpha (\alpha \partial_\alpha \xi) - \frac{\beta}{\alpha^2} \partial_\beta (\beta \partial_\beta \xi) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Tetapi dalam makalah ini kami hanya mengkaji komponen χ saja karena komponen ξ memiliki solusi yang analogi. Dengan mengurai fungsi gelombang sebagai,

$$\chi = A(\alpha) B(\beta) \quad (30)$$

dikalikan dengan α^2 dan $1/AB$ maka pers. (29) dapat dinyatakan sebagai,

$$\frac{\alpha}{A} \partial_\alpha (\alpha \partial_\alpha A) - \frac{\beta}{B} \partial_\beta (\beta \partial_\beta B) = 0 \quad (31)$$

Dengan demikian pers. (31) dapat diperoleh solusinya melalui metode separasi variabel,

$$\frac{\alpha}{A} \partial_\alpha (\alpha \partial_\alpha A) = \frac{\beta}{B} \partial_\beta (\beta \partial_\beta B) = -k^2 \quad (32)$$

yang memiliki solusi berupa,

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= C_1 \exp(ik \ln \alpha) + C_2 \exp(-ik \ln \alpha) \\ B(\beta) &= C_3 \exp(ik \ln \beta) + C_4 \exp(-ik \ln \beta) \end{aligned} \quad (33)$$

Adapun pada syarat batas dinding sumur potensial maka fungsi gelombang akan lenyap. Dengan mengalikan kedua pers. (19) akan diperoleh $\beta^2 = \frac{t+x}{t-x}$. Untuk dinding sebelah kiri yang statis pada $t=t_0$ dan $x=0$ maka $\beta_L^2 = 1$ sehingga dipenuhi kondisi $C_3 = -C_4$ dan solusi fungsi gelombang bagian koordinat β adalah,

$$B(\beta) = Y \sin(k \ln \beta) \quad (34)$$

Sedangkan dengan menggunakan syarat batas pada dinding sebelah kanan yang memenuhi $x=L(t) = L_0 + v(t-t_0)$ maka,

$$\chi = X \exp(ik_n \ln \alpha) \sin(n\pi \ln(\beta - \beta)) + Y \exp(-ik \ln \beta) \sin(n\pi \ln(\beta - \beta_R)) \quad (37)$$

Apabila dalam kotak potensial yang bergerak tidak terdapat arus probabilitas $J=0$ maka dapat dilakukan normalisasi,

$$\int \rho d^3x = 1 \quad (38)$$

dimana rapat probabilitas yang berlaku dalam koordinat (α, β) adalah,

$$i \int_{\beta_L}^{\beta_R} \frac{\alpha}{\beta} d\beta (\chi_n^* \partial_\alpha \chi_m - \chi_m \partial_\alpha \chi_n^*) = \delta_{mn} \quad (39)$$

dan fungsi eigennya adalah,

$$\chi_m^\pm = X_m^\pm \exp(\pm ik_m \ln \alpha) \sin(k_m \ln \beta) \quad (40)$$

$$\beta_R^2 = \frac{1+v}{1-v} \quad (35)$$

dan dapat disimpulkan,

$$k_n = \frac{n\pi}{\ln \beta_R} \quad (36)$$

Dari persamaan di atas tampak bahwa kecepatan maksimum dari dinding potensial adalah 1. Hal ini berkaitan dengan penggunaan sistem satuan *natural unit* $c = 1$. Sehingga pada penggunaan praktis perlu dilakukan penskalaan nilai kecepatan dinding potensial v terhadap nilai c . Dengan definisi $\alpha^2 = t^2 - x^2$ maka secara eksplisit fungsi gelombang pada pers. (30) dapat dituliskan sebagai,

Melalui substitusi pers. (40) dengan menyesuaikan konjugatnya maka untuk partikel χ_m^- akan diperoleh,

$$2k_m |X_m^-|^2 \int_{\beta_L}^{\beta_R} \sin^2(k_m \ln \beta) \frac{d\beta}{\beta} = 1 \quad (41)$$

dan dapat disimpulkan,

$$|X_m^-| = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \quad (42)$$

Sedangkan dengan cara yang sama fungsi gelombang anti-partikel χ_m^+ diperoleh,

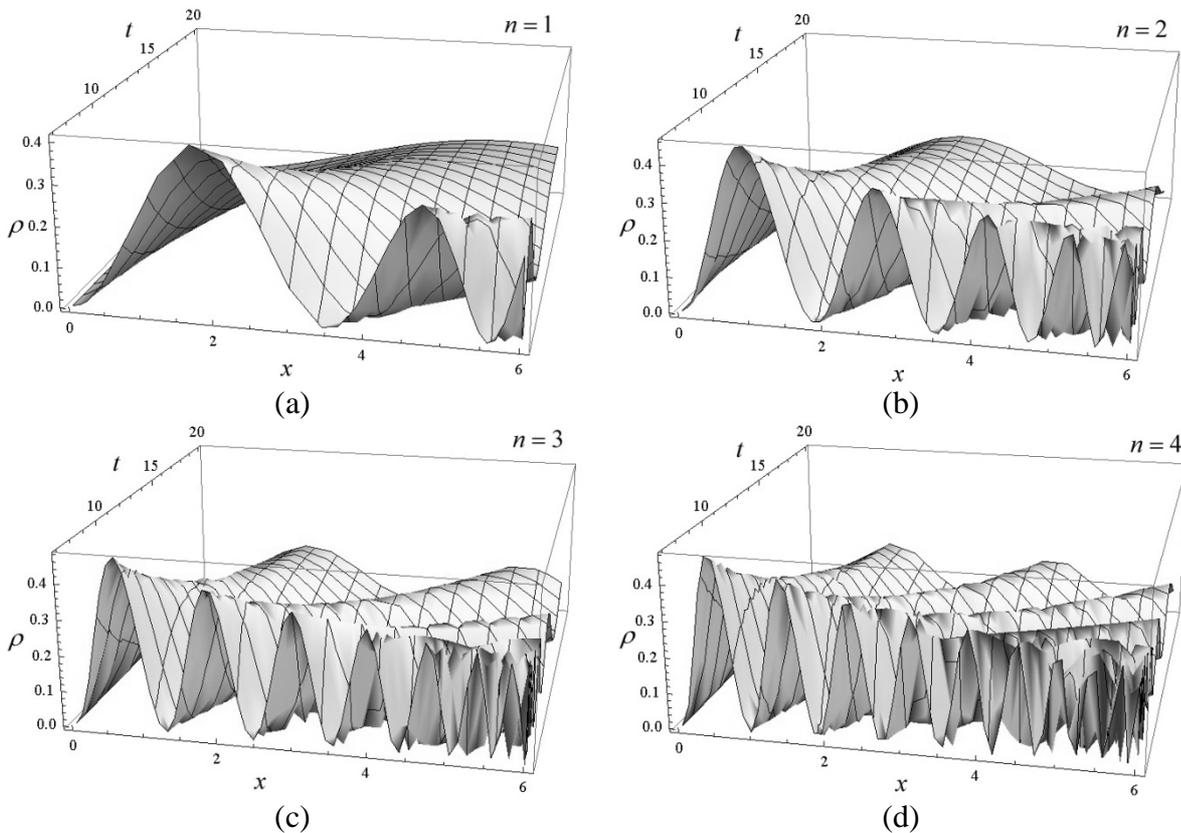
$$|X_m^+| = -\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \quad (43)$$

Secara eksplisit, rapat probabilitas dari fungsi gelombang partikel χ_m^- pada pers. (40) dapat didefinisikan sebagai,

$$\rho = \frac{2k_m}{m\pi\alpha\beta} \sin^2(k_m \ln \beta) \quad (44)$$

Sehingga apabila diplot dalam grafik rapat probabilitasnya tampak seperti pada Gambar

4. Melalui skema tersebut tampak bahwa grafik rapat probabilitas akan memiliki jarak yang makin rapat pada area yang makin dekat dengan dinding yang bergerak. Adapun untuk nilai rapat probabilitasnya lebih rendah dibandingkan dengan area yang berdekatan dengan dinding yang diam.



Gambar 4. Rapat probabilitas fungsi gelombang partikel χ_m^- pada empat keadaan terendah terhadap fungsi ruang dan waktu ($v = 0.5$).

KESIMPULAN

Di dalam makalah ini kami telah menunjukkan bahwa tinjauan sumur potensial dinamis untuk persamaan Dirac dapat diselesaikan secara sederhana melalui transformasi ke dalam koordinat hiperbolik. Implikasi dari penggunaan dinding potensial

yang bergantung waktu adalah menyebabkan rapat probabilitas partikel Dirac yang diperoleh juga turut bergantung pada waktu (selain bergantung pada ruang). Perubahan rapat probabilitas terhadap waktu muncul akibat adanya perubahan lebar sumur potensial. Semakin lama dinding potensial

bergerak maka semakin lebar pula celah sumur potensial sehingga menyebabkan rapat probabilitasnya pun akan semakin landai. Di dekat dinding yang dapat bergerak rapat probabilitas partikel Dirac lebih fluktuatif dibandingkan di area dinding yang diam. Melalui kesimpulan ini maka menarik untuk memanfaatkan hasil perhitungan teoritis ini dalam aplikasi nanoteknologi.

DAFTAR PUSTAKA

- Chetouani, L. & Guechi, L. 1989. *Generalized canonical transformations and path integrals*. Physical Review A 40(3): 1157-1164.
- Fermi, E. 1949. *On the origin of the cosmic radiation*. Physical Review 75(8): 1169-1174.
- Hamil, B & Chetouani, L. 2016. *Moving potential for Dirac and Klein-Gordon equations*. Pramana Journal of Physics 86(4): 737-746.
- Ji, J. Kim, J. & Kim, S. 1995. *Heisenberg-picture approach to the exact quantum motion of a time-dependent harmonic oscillator*. Physical Review A 51(5): 3767-3772.
- Katsnelson, M., Novoselov, K. & Geim, A. 2006. *Chiral tunneling and the Klein paradox in graphene*. Nature Physics 2(9): 620-625.
- Lewis Jr., H. & Riesenfeld, W. 1969. *An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field*. Journal of Mathematical Physics 10(8)L 1458-1473.
- Oh, H. G., Lee, H. R., George, T. F. & Um, C. I. 1989. *Exact wave functions and coherent states of a damped driven harmonic oscillator*. Physical Review A 39(11): 5515-5522.
- Savel'ev, S., Hausler, W. & Hanggi, P. 2012. *Current resonances in graphene with time-dependent potential barriers*. Physical Review Letters 109: 22602(1)-226602(5).
- Zettili, N. 2009. *Quantum mechanics: concepts and applications (2nd edition)*. United Kingdom: John Wiley & Sons, Ltd.

