Edumatsains, 6 (1) Juli 2021, 101-110

EduMatSains

Jurnal Pendidikan, Matematika dan Sains

http://ejournal.uki.ac.id/index.php/edumatsains

KILLING FORM ALJABAR LIE FROBENIUS BERDIMENSI ≤ 4 UNTUK MENENTUKAN KESEMISEDERHANAANNYA

Edi Kurniadi[1*]

[1]Departemen Matematika FMIPA UNPAD

Diterima: 29 Mei 2021 Direvisi: 18 Juni 2021 Diterbitkan : 01 Juli 2021

ABSTRACT

We study the notion of the Killing form for Frobenius Lie algebras of dimension $\leq \mathbf{4}$. The Killing form is a symmetric bilinear form on a finite dimensional Lie algebra $\mathfrak{g}$ over a field $\mathbb{F}$ defined by $\mathfrak{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (x, y) \mapsto \mathfrak{K}(x, y) := \mathbf{Tr}(\mathbf{ad}x\, \mathbf{ad}y) \in \mathbb{F}$ where $\mathbf{Tr}$ is denoted the trace and $\mathbf{ad}$ is an adjoint representation of $\mathfrak{g}$. A Lie algebras is said to be semisimple if it has the nondegenerate Killing form. The research aims to consider the criterion for semisimplicity of Frobenius Lie algebras of dimension $\leq \mathbf{4}$ by using the Killing form. The results show that each Frobenius Lie algebra of dimension $\mathbf{2}$ and $\mathbf{4}$ is not semisimple since the the Killing form is degenerate or in other words, a determinant of a representation matrix of the Killing form is equal to zero. For the future research, it is still an open problem to consider the general formulas of the Killing form for higher dimensional Frobenius Lie algebra whether degenerate or nondegenerate such that the semisimplicity of a Lie algebra can be considered. We conjecture that each finite dimensional real Frobenius Lie algebra is not semisimple.

Keywords: Frobenius Lie algebra, Killing form, Nondegenerate, Degenerate, Semisimple

PENDAHULUAN

Aljabar Lie Frobenius mempunyai sifat-sifat yang menarik untuk dipelajari. Grup Lie dari aljabar Lie Frobenius bersifat non-unimodular karena *trace* dari representasi *adjoint*-nya tidak sama dengan nol yaitu $\mathrm{Tr} \circ \mathrm{ad} \neq 0$. Kemudian grup Lie dari aljabar Lie Frobenius juga tidak bersifat kompak (Alvarez & et al, 2018). Lebih jauh, diperoleh juga bahwa dimensi aljabar Lie Frobenius senantiasa genap dan *coadjoit orbit*-nya senantiasa buka di ruang dualnya(Csikós & Verhóczki, 2007). Di sisi lain, sifat-sifat unsur utama aljabar Lie Frobenius yang berkaitan dengan Frobenius fungsionalnya juga sudah dibahas secara detail dalam penelitian sebelumnya (Diatta & Manga, 2014) termasuk penelitian dalam masalah G-quasi aljabar Lie Frobenius (Pham, 2016). Tentu saja, walaupun ada beberapa aljabar Lie Frobenius yang bersifat *solvable* tetapi semua aljabar Lie Frobenius bersifat tidak nilpoten.

Sifat orbit *coadjoint* pada grup Lie dari aljabar Lie Frobenius dapat dipelajari sebagai dasar mempelajari teori representasi grup Lie dengan metode orbit (Kirillov, 2004). Khusus untuk yang berdimensi 4,

***Correspondence Address**

E-mail: *edi.kurniadi@unpad.ac.id

sifat orbit *coadjoint* dari grup Lie Frobenius yang senantiasa buka di ruang dualnya menunjukkan bahwa representasinya senantiasa bersifat terintegralkan kuadrat atau *square-integrable representation* (Kurniadi & Ishi, 2019). Lebih jauh, teori tentang representasi terintegralkan kuadrat dapat direduksi menjadi kasus transformasi wavelet (Ishi, 2006). Di sisi lain, aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 mempunyai struktur aljabar simetrik kiri dan telah diberikan pula rumus eksplisit untuk struktur tersebut. Dalam hal ini, induksi Frobenius fungsional pada aljabar Lie Frobenius sangat berperan untuk mendapatkan formula tersebut (Diatta, Manga, & Mbaye, 2020).

Berbeda dengan hasil-hasil sebelumnya yang membahas beberapa sifat aljabar Lie Frobenius berdimensi ≤ 4 seperti kenonunimodularan, ketertutupan orbit *coadjoint,* dan keterintegralan kuadrat representasinya, sifat lain yang menarik untuk dipelajari dari aljabar Lie Frobenius adalah kesemisederhanaannya dengan cara menghitung *Killing form* untuk setiap representasi *adjoint*-nya. Tujuan penelitian ini adalah mempelajari kesemisederhanaan aljabar Lie Frobenius berdimensi ≤ 4 yaitu berdimensi 2 dan 4 dengan menggunakan *Killing form.* Dalam proses pembuktiaannya digunakan fakta bahwa setiap aljabar Lie $\mathfrak{g}$ adalah semisederhana jika dan hanya jika *Killing form*-nya adalah *nondegenerate*. Pernyataan tersebut ekuivalen dengan pernyataan bahwa setiap aljabar Lie $\mathfrak{g}$ tidak semisederhana jika dan hanya jika *Killing form*-nya adalah *degenerate* atau determinan matriks representasi *Killing form*-nya sama dengan nol.

Adapun alasan mengapa memilih aljabar Lie Frobenius atas lapangan real $\mathbb{R}$ berdimensi 2 dan 4 karena hasil yang diperoleh bisa diperluas untuk kasus aljabar Lie Frobenius atas lapangan sembarang $\mathbb{F}$ dengan dimensi yang lebih tinggi atau > 4. Dugaan atau konjektur dari hasil penelitian ini bahwa setiap aljabar Lie Frobenius real hingga tidak semisederhana. Perlu diperhatikan bahwa dimensi aljabar Lie Frobenius senantiasa genap atau dengan kata lain, dimensinya $2n$ dengan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan $\mathbb{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli.

Artikel ini ditulis dengan menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut : Bagian pertama adalah pendahuluan yang menjelaskan tentang latar belakang, motivasi penelitian, dan signifikansi penelitian serta teori yang akan digunakan dalam bagian hasil dan pembahasan utama artikel ini. Bagian ke dua adalah Metode penelitian yaitu studi literatur. Bagian ke tiga adalah hasil dan pembahasan yaitu membuktikan bahwa aljabar Lie Frobenius berdimensi ≤ 4 adalah tidak semisederhana dengan cara menghitung *Killing form*-nya dan menunnjukkan bahwa *Killing form* tersebut *degenerate*. Masih dalam bagian ini, dibahas juga tentang diskusi untuk penelitian selanjutnya. Diduga bahwa secara umum setiap aljabar Lie Frobenius real adalah tidak semisederhana. Selanjutnya bagian empat adalah kesimpulan hasil penelitian.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Pertama dipelajari tentang pemetaan bilinear dan multilinear *form*, ke dua dipelajari tentang kriteria tentang kesemisederhanaan yang berkaitan dengan *Killing form*, dan yang ke tiga dipelajari tentang aljabar Lie Frobenius berdimensi ≤ 4. Dengan menghitung semua *Killing form* untuk semua aljabar Lie Frobenius tersebut dan dengan menggunakan Teorema 5 di atas maka dapat ditentukan kesemisederhanaan aljabar Lie Frobenius tersebut. Hasil tersebut menunjukkan bahwa aljabar Lie Frobenius berdimensi 2 dan 4 senantias tidak semisederhana.

Dalam artikel ini, semesta pembicaraannya adalah aljabar Lie atas lapangan real yaitu $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ yang tentunya mempunyai karakteristik sama dengan nol atau aljabar Frobenius real. Tinjauan terhadap landasan teori yang akan digunakan dalam penelitian ini antara lain teori pemetaan bilinear, representasi *adjoint*, *Killing form* suatu aljabar Lie, kriteria semisederhana, dan aljabar Lie Frobenius khususnya klasifikasi untuk aljabar Lie Frobenius berdimensi 2 dan 4.

Misalkan $\mathfrak{g}$ adalah ruang vektor. Pemetaan yang diberikan oleh $\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dikatakan linear jika $\mathfrak{B}_1$ mengawetkan operasi penjumlahan vektor dan mengawetkan operasi perkalian skalar dengan vektor. Konsep ini bisa diperluas menjadi konsep pemetaan multilinear yang secara formal diberikan oleh definisi berikut ini

Definisi 1 (McInerney, 2013). Misalkan $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$ dan $\mathfrak{h}$ ruang vektor real. Pemetaan yang diberikan oleh

$$\mathfrak{B}_n : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \dots \times \mathfrak{g}_n \rightarrow \mathfrak{h} \qquad (1)$$

dikatakan multilinear jika setiap komponennya bersifat linear.

Jika ruang vektor $\mathfrak{h} = \mathbb{R}$ maka diperoleh notasi multilinear n −*form*. Khususnya untuk $n = 2$, diperoleh notasi bilinear *form*, yaitu pemetaan bilinear

$$\mathfrak{B}_n : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathbb{R} \qquad (2)$$

Dalam hal ini, bisa diambil kasus $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$. Hasil kali dalam atau *inner product* pada suaru ruang vektor real adalah contoh bilinear *form* yang sudah banyak dikenal.

Definisi 2 (McInerney, 2013). Misalkan $\mathfrak{g}$ ruang vektor. Pemetaan $\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dikatakan bentuk simplektik linear jika 3 kondisi berikut dipenuhi :

1. $\mathfrak{B}_2$ adalah bilinear *form*.
2. $\mathfrak{B}_2$ antisimetrik, yaitu $\mathfrak{B}_2(\alpha, \beta) = -\mathfrak{B}_2(\beta, \alpha)\ \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g}$, dan

3. $\mathfrak{B}_2$ nondegenerate yaitu $\mathfrak{B}_2(\alpha,\beta) = 0, \forall\beta \in \mathfrak{g}$ mengakibatkan $\alpha = 0$.

Selanjutnya ruang vektor yang dilengkapi *bracket* Lie yaitu pemetaan bilinear $[\,,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ yang mempunyai sifat $[\alpha,\alpha] = 0, \forall\alpha \in \mathfrak{g}$ dan memenuhi identitas Jacobi disebut aljabar Lie. Ruang vektor real $\mathbb{R}$ terhadap *bracket* $[a,a] = 0$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ adalah contoh aljabar Lie. Contoh lain aljabar Lie yang sudah banyak dikenal adalah ruang vektor $\mathbb{R}^3$ dengan *bracket* berupa *cross product* atau hasil kali silang. Kelas aljabar Lie yang banyak dipelajari antara lain adalah aljabar Lie nilpotent, aljabar Lie solvable, dan aljabar Lie Frobenius.

Misalkan Der $\mathfrak{g}$ menotasikan himpunan semua derivasi pada suatu aljabar Lie $\mathfrak{g}$ yaitu himpunan yang memuat semua pemetaan bilinear $D(ab) = aD(b) + D(a)b$ untuk semua $a, b \in \mathfrak{g}$. Dalam kasus ini aljabar Lie $\mathfrak{g}$ adalah suatu aljabar atas lapangan $\mathbb{R}$. Representasi suatu aljabar Lie $\mathfrak{g}$ adalah suatu homomorfisma aljabar Lie yang diberikan oleh $\psi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ dengan $\mathfrak{gl}(V)$ adalah himpunan semua pemetaan linear pada ruang vektor V. Jika $V = \mathfrak{g}$, diperoleh representasi *adjoint* yang definisikan sebagai berikut :

$$\mathrm{ad}(\alpha) : \mathfrak{g} \ni \beta \mapsto \mathrm{ad}(\alpha)\beta = [\alpha,\beta] \in \mathfrak{g} \qquad (3)$$

untuk setiap $\alpha \in \mathfrak{g}$.

Dalam suatu aljabar Lie dikenal juga notasi *radical* yaitu ideal solvable maksimal.

Definisi 3 (Hilgert & Neeb, 2012)**.** Bilinear *form* pada aljabar Lie $\mathfrak{g}$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathfrak{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (\alpha,\beta) \mapsto \mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(\alpha)\mathrm{ad}(\beta)\big) \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

dikatakan *Killing form* jika $\mathfrak{K}$ simetrik.

Karena $\mathrm{Tr}([\alpha,\beta],\gamma) = \mathrm{Tr}(\alpha,[\beta,\gamma])$ untuk semua endomorfisma ruang vektor hingga $\mathfrak{g}$ maka *Killing form* $\mathfrak{K}$ bersifat asosiatif yaitu $\mathfrak{K}([\alpha,\beta],\gamma) = \mathfrak{K}(\alpha,[\beta,\gamma])$ (Humphreys, 1972).

Definisi 4 (Humphreys, 1972). Bilinear form $\mathfrak{B}$ pada aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dikatakan *nondegenerate* jika *radical* R sama dengan 0 dengan $R = \{\alpha \in \mathfrak{g}\,;\, \mathfrak{B}(\alpha,\beta) = 0, \forall\beta \in \mathfrak{g}\}$.

Definisi 4 di atas ekuivalen dengan determinan matriks representasi dari bilinear *form* $\mathfrak{B}$ tidak sama dengan nol.

Teorema 5(Humphreys, 1972). *Aljabar Lie* $\mathfrak{g}$ *dikatakan semisederhana jika dan hanya jika Killing form-nya bersifat nondegenerate.*

Contoh aljabar Lie semisederhana adalah $\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2)$ yaitu aljabar Lie berdimensi 3 dari semua matriks persegi berukuran 2×2 yang *trace*-nya sama dengan nol. Dengan basis sebagai berikut :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

diperoleh matriks representasi untuk *Killing form*-nya adalah $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ yang mempunyai determinan sama dengan -128. Oleh karena itu, *Killing form* dari $\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2)$ *nondegenerate*. Jadi, $\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2)$ semisederhana.

Definisi 6(Alvarez & et al, 2018). Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie berdimensi $2n$ dengan ruang dualnya $\mathfrak{g}^*$ didefiniskan oleh

$$\mathfrak{g}^* = \{\psi \in \mathfrak{g}^* \,;\, \psi : \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \text{ linear form}\} \quad (6)$$

Aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dikatakan Frobenius jika terdapat linear form $f \in \mathfrak{g}^*$ sedemikian sehingga stabilizizer $\mathfrak{g}^f = \{\alpha \in \mathfrak{g} \,;\, \mathrm{ad}^*(\alpha)f = 0,\ f \in \mathfrak{g}^*\}$ trivial.

Pemetaan ad^* adalah representasi dari $\mathfrak{g}$ pada ruang dualnya yaitu pada ruang $\mathfrak{g}^*$.

Untuk aljabar Lie Frobenius $\mathfrak{g}_1 = \langle \alpha, \beta \rangle$ berdimensi 2, Lie *bracket*-nya diberikan oleh $[\alpha, \beta] = \beta$. Sedangkan untuk aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 terdapat 3 kelas isomorfisma(Csikós & Verhóczki, 2007). Dalam penelitian ini akan dibahas untuk kelas pertama secara detail dan ke dua kelas lainnya mengikuti pembuktian dari kelas pertamanya. *Bracket* Lie untuk kelas pertama $\mathfrak{g}^I$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$[\alpha_4, \alpha_1] = [\alpha_3, \alpha_2] = \alpha_1, [\alpha_4, \alpha_2] = \frac{1}{2}\alpha_2,$$
$$[\alpha_4, \alpha_3] = \tfrac{1}{2}\alpha_3. \quad (7)$$

Kelas ke dua $\mathfrak{g}_\delta^{II}$ mempunyai Lie *bracket* sebagai berikut:

$$[\alpha_4, \alpha_1] = [\alpha_3, \alpha_2] = \alpha_1, [\alpha_4, \alpha_2] = \alpha_3,$$
$$[\alpha_4, \alpha_3] = \alpha_3 - \delta\alpha_2. \quad (8)$$

dengan $\delta \in \mathbb{R}$.

Sedangkan untuk kelas terakhir $\mathfrak{g}_\varepsilon^{III}$, Lie *bracket*-nya dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$[\alpha_3, \alpha_1] = [\alpha_4, \alpha_2] = \alpha_1, [\alpha_1, \alpha_4] = \varepsilon\alpha_2,$$
$$[\alpha_3, \alpha_2] = \alpha_2. \quad (9)$$

dengan $\varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Representasi *adjoint*-nya dapat dinyatakan sebagai *brackets* tersebut, yaitu $\mathrm{ad}(\alpha)\beta = [\alpha, \beta]$ untuk setiap α dan β di $\mathfrak{g}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas tentang kesemisederhanaan aljabar Lie Frobenius berdimensi ≤ 4. Hasil yang diperoleh adalah setiap aljabar Lie Frobenius berdimensi 2 dan 4 tidak semisederhana. Lebih formal, hasil yang diperoleh tersebut dapat dinyatakan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 7. *Aljabar Lie Frobenius real berdimensi* 2 *dan* 4 *adalah tidak semisederhana.*

Bukti .

Untuk kasus aljabar Lie Frobenius $\mathfrak{g}_1 = \langle \alpha, \beta \rangle$berdimensi 2, *bracket* yang digunakan diberikan sebagai komutator matriks oleh $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha = \beta$ atau dengan kata lain dapat dinyatakan sebagai representasi $\mathrm{ad}(\alpha)\beta = \beta$. Untuk mempermudah perhitungan, dalam kaitannya dengan *barcket* di atas, α dan β dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut : $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berkaitan dengan representasi ini, diperoleh matriks representasi *adjoint*-nya sebagai berikut :

$$\mathrm{ad}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{ad}(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Dengan menghitung semua trace dari perkalian representasi *adjoint*-nya diperoleh

1. $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(\alpha)\mathrm{ad}(\alpha)\big) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$
2. $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(\alpha)\mathrm{ad}(\beta)\big) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$
3. $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(\beta)\mathrm{ad}(\alpha)\big) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$
4. $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(\beta)\mathrm{ad}(\beta)\big) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

Oleh karena itu, matriks representasi untuk *Killing form* $\mathfrak{g}_1$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$M(\mathfrak{K}^{\mathfrak{g}_1})_{\mathfrak{g}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

yang determinannya sama dengan nol. Dengan kata lain, *Killing form* $\mathfrak{K}^{\mathfrak{g}_1}$ adalah *degenerate*. Oleh karena itu, aljabar Lie Frobenius $\mathfrak{g}_1$ tidak semisederhana.

Untuk kelas aljabar Lie Frobenius berdimensi 4, dapat dibagi ke dalam tiga kasus sebagai berikut :

Kelas pertama $\mathfrak{g}^I$ yang *bracket*-nya dinyatakan dalam persamaan (7). Dengan menghitung langsung matriks representasi *adjoint*-nya diperoleh

1. $\mathrm{ad}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
2. $\mathrm{ad}(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
3. $\mathrm{ad}(\alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
4. $\mathrm{ad}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dengan menghitung matriks representasi dari *Killing form* $M\big(\mathfrak{K}^{\mathfrak{g}^I}\big)_{\mathfrak{g}^I}$ didapat entri pada baris pertama semuanya nol. Oleh karena itu, berdasarkan sifat determinan maka determinan matriks $M\big(\mathfrak{K}^{\mathfrak{g}^I}\big)_{\mathfrak{g}^I}$ sama dengan nol. Dengan kata lain, *Killing form* $\mathfrak{K}^{\mathfrak{g}^I}$ *degenerate*. Oleh karena itu, aljabar Lie Frobenius kelas pertama $\mathfrak{g}^I$ tidak semisederhana.

Kelas ke dua aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 $\mathfrak{g}_\delta^{II}$ mempunyai Lie *bracket* yang dinyatakan dalam persamaan (8). Matriks representasi *adjoint*-nya diperoleh

1. $\mathrm{ad}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
2. $\mathrm{ad}(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
3. $\mathrm{ad}(\alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

4. $\mathrm{ad}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dapat dilihat bahwa baris pertama matriks $M\left(\mathfrak{K}^{\mathfrak{g}_\delta^{II}}\right)_{\mathfrak{g}_\delta^{II}}$ semua entrinya sama dengan nol sehingga determinannya sama dengan nol. Dengan kata lain *Killing form* $\mathfrak{K}^{\mathfrak{g}_\delta^{II}}$ *degenerate*. Jadi aljabar Lie Frobenius kelas ke dua $\mathfrak{g}_\delta^{II}$ juga tidak semisederhana.

Untuk kelas terakhir atau kelas ke tiga aljabar Lie Frobenius real $\mathfrak{g}_\varepsilon^{III}$ dengan $\varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$ mempunyai *bracket* yang diberikan oleh persamaan (9). Matriks representasi *adjoint*-nya diperoleh sebagai berikut :

1. $\mathrm{ad}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
2. $\mathrm{ad}(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
3. $\mathrm{ad}(\alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
4. $\mathrm{ad}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sama halnya dengan dua kelas sebelumnya, baris pertama matriks $M\left(\mathfrak{K}^{\mathfrak{g}_\varepsilon^{III}}\right)_{\mathfrak{g}_\varepsilon^{III}}$ semua entrinya sama dengan nol. Dengan kata lain *Killing form* $\mathfrak{K}^{\mathfrak{g}_\varepsilon^{III}}$ *degenerate*. Jadi aljabar Lie Frobenius kelas ke dua $\mathfrak{g}_\varepsilon^{III}$ tidak semisederhana.

Jadi, aljabar Lie Frobenius berdimensi 2 dan 4 semuanya tidak semisederhana.

■

Untuk penelitian selanjutnya, sebagai bahan diskusi diduga bahwa setiap aljabar Lie Frobenius tidak semisederhana. Pernyataan tersebut dinyatakan dalam konjektur berikut ini.

Konjektur 8. *Setiap aljabar Lie Frobenius atas lapangan real* $\mathbb{R}$ *tidak semisederhana.*

Meskipun aljabar Lie Frobenius tidak semisederhana tetapi aljabar Lie Frobenius masih memegang peranan penting dalam bermacam cabang matematika misalnya tentang penyelesaian masalah *Classical Yang Baxter equations* dan domain homogen terbatas di $\mathbb{C}^n$. Di sisi lain, meskipun aljabar Lie Frobenius tidak semisederhana akan tetapi terdapat aljabar Lie Frobenius yang dapat diperoleh sebagai jumlah semi langsung aljabar Lie semisederhana. Sebagai contoh aljabar Lie *affine* $\mathfrak{aff}(2)$ *yang* berdimensi 6 merupakan jumlah semi langsung dari $\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2)$ yang merupakan aljabar Lie semisederhana berdimensi 3(Ooms, 2009). Dengan demikian, aljabar Lie Frobenius dan sifat-sifatnya sangat menarik untuk dipelajari.

KESIMPULAN

Dalam penelitian ini telah dibuktikan bahwa aljabar Lie Frobenius berdimensi ≤ 4 yaitu berdimensi 2 dan 4 tidak semisederhana. Proses pembuktian dilakukan dengan cara menghitung semua *Killing form* untuk setiap kelas aljabar Lie Frobenius tersebut dan menunjukan bahwa masing-masing *Killing form*-nya *degenerate* atau determinan matriks representasi *Killing form*-nya sama dengan nol. Untuk penelitian selanjutnya, sifat kesemisederhanaan untuk sembarang aljabar Lie Frobenius hingga masih terbuka untuk diteliti. Diduga bahwa sembarang aljabar Lie Frobeinius real hingga tidak semisederhana.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas padjadjaran yang telah mendanai penelitian ini melalui Riset Percepatan Lektor Kepala (RPLK) tahun 2021 dengan nomor kontrak 1959/UN6.3.1/PT.00/2021.

DAFTAR PUSTAKA

Alvarez, M. A., & et al. (2018). Contact and Frobenius solvable Lie algebras with abelian nilradical. *Comm. Algebra*, *46*, 4344–4354.

Csikós, B., & Verhóczki, L. (2007). Classification of frobenius Lie algebras of dimension $\leq$ 6. *Publicationes Mathematicae*, *70*(3–4), 427–451.

Diatta, A., & Manga, B. (2014). On properties of principal elements of frobenius lie algebras. *J. Lie Theory*, *24*(3), 849–864.

Diatta, A., Manga, B., & Mbaye, A. (2020). *On systems of commuting matrices , Frobenius Lie algebras and Gerstenhaber ' s Theorem*. (February), 0–12.

Hilgert, J., & Neeb, K.-H. (2012). *Structure and Geometry of Lie Groups*. New York: Springer Monographs in Mathematics, Springer.

Humphreys, J. . (1972). *Introduction to Lie ALgebra and its Representation.pdf* (Third Prin). New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag.

Ishi, H. (2006). Continuous wavelet transform for semi-direct product groups with not necessarily commutative normal subgroups. *Fourier Analysis*, *12*, 37--52.

Kirillov, A. A. (2004). Lectures on the Orbit Method, Graduate Studies in Mathematics. *American Mathematical Society,Providence*, *64*.

Kurniadi, E., & Ishi, H. (2019). Harmonic Analysis for 4- Dimensional Real Frobenius Lie Algebras. *Springer Proceeding in Mathematics & Statistics.* https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-66963-2

McInerney, A. (2013). *First Steps in Differential Geometry : Riemannian, Contact, Symplectic*. New York :

Springer-Verlag.

Ooms, A. I. (2009). Computing invariants and semi-invariants by means of Frobenius Lie algebras. *J. Algebra*, *321*, 1293--1312. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.10.026

Pham, D. N. (2016). G-Quasi-Frobenius Lie Algebras. *Archivum Mathematicum*, *52*(4), 233–262. https://doi.org/10.5817/AM2016-4-233