Edumatsains, 6 (1) Juli 2021, 61-70
EduMatSains
Jurnal Pendidikan, Matematika dan Sains
http://ejournal.uki.ac.id/index.php/edumatsains

BILANGAN DOMINASI LOKASI PADA *LINE PAN GRAPH* DAN *MIDDLE PAN GRAPH*

Fransiskus Fran[1*], Elishabet Yohana[2] , Yundari[3]

[1,2,3]Jurusan Matematika FMIPA Universtas Tanjungpura

Diterima: 18 Mei 2021 Direvisi: 19 Juni 2021 Diterbitkan : 01 Juli 2021

ABSTRACT

One of the branches of mathematic that is useful for solving problem in everyday life is graph theory. Graph theory is the study of graphs, which are mathematical structures used to model pairwise relations between objects (nodes and edges). One of the topics in graph theory is the dominating set and domination number. Let $G = (V, E)$ be a simple, connected, and undirected graph and a set D is a subset of V. If every node of $V - D$ adjacent at least one node in D, then D is a dominating set of the graph G. One of the topics from dominating set is locating dominating set. Locating dominating set is dominating set on condition if every two vertices $u, v \in V - D$ satisfy $N(v) \cap D \neq N(u) \cap D \neq \emptyset$ with $u \neq v$. The locating domination number of graph G is the minimum cardinality of a locating dominating set in a graph G. The locating domination number of a graph G denoted by $\gamma_L(G)$. In this study discussed the locating domination number on line pan graph $\left(L(T_{n,1})\right)$ and middle pan graph $\left(M(T_{n,1})\right)$. Locating domination number was obtained by finding dominating set from some graph. Then, does the dominating set meet the condition of locating dominating set? If it meets locating dominating set condition, then we can find the locating domination number of the graphs. In the last procedure, we get pattern location domination number of line pan graph and middle pan graph. The results of the study obtained the locating domination number is $\gamma_L\left(L(T_{n,1})\right) = \left\lfloor\frac{2n}{5}\right\rfloor + 1$ and $\gamma_L\left(M(T_{n,1})\right) = \left\lfloor\frac{2n+1}{3}\right\rfloor + 1$.

Keywords: Pan graph, Locating dominating set, neighbourhood of the vertex

PENDAHULUAN

Perkembangan teknologi salah satunya didukung oleh perkembangan ilmu matematika, baik secara teori maupun penerapannya yang mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan yang ada. Salah satu kajian ilmu matematika yang cukup pesat perkembangannya adalah teori graf, yang diperkenalkan pada 1736 oleh Leonhard Euler yang merupakan matematikawan Swiss, melalui tulisannya tentang upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg di Sungai Pregel yang mengalir mengitari pulau Kneiphof. Beberapa permasalahan lain yang telah dipecahkan menggunakan teori graf diantaranya adalah jaringan komunikasi, ilmu komputer, riset operasi dan lain sebagainya (Munir, 2010).

Berdasarkan perkembangannya, terdapat banyak topik kajian dalam teori graf, salah satunya tentang himpunan

***Correspondence Address**
E-mail: *fransiskusfran@math.untan.ac.id

dominasi. Misal diberikan graf G yang merupakan pasangan himpunan (V, E), dengan V menyatakan himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan E adalah subhimpunan dari $V \times V$ dan disebut himpunan sisi (Munir, 2010). Misalkan D adalah subhimpunan dari V. Jika masing-masing simpul dari $V - D$ bertetangga dengan setidaknya satu simpul dari D, maka D disebut himpunan dominasi dari G (Santoso, Djuwandi, & Soelistyo, 2012). Terdapat beberapa pengembangan terkait himpunan dominasi dengan menambahkan syarat tertentu, salah satunya berkaitan dengan konsep lokasi dan disebut himpunan dominasi lokasi.

Penelitian sebelumnya tentang bilangan dominasi lokasi, telah diteliti pada graf lintasan, graf *cycle* dan *pan graph* (Yohana, Yundari, & Fran, 2020). Bilangan dominasi lokasi juga pernah diteliti untuk graf bipartit dan komplemennya (Hernando, Mora, & Pelayo, 2018), graf interval dan graf permutasi (Foucaud, Mertzios, R Naserasr, & Valicov, 2016), *Petersen graph* (Balbuena, Foucaud, & Hansberg, 2015), *functigraphs* (Murtaza, Fazil, Javaid, & Benish, 2017) dan korona dari beberapa graf (Canoy & Malacas, 2014). Dalam hal ini korona graf merupakan salah satu cara untuk memperoleh graf baru dari graf-graf yang sudah ada. Selain itu, terdapat banyak cara untuk membentuk graf baru dari graf-graf yang sudah ada. Oleh karena itu, penelitian terkait bilangan dominasi lokasi untuk graf-graf hasil operasi maupun hasil konstruksi dari graf-graf yang sudah ada masih sangat terbuka. Hal ini diantaranya untuk melihat karakteristik bilangan dominasi yang dihasilkan dari graf baru tersebut. Pada artikel ini, dibahas bilangan dominasi lokasi pada graf hasil konstruksi dari *pan graph* menggunakan konsep *line graph* dan *middle graph*.

METODE PENELITIAN

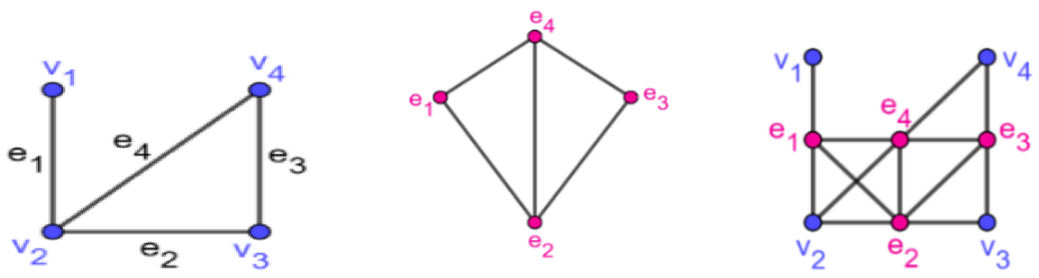
Salah satu terminologi dasar graf terkait himpunan dominasi lokasi adalah persekitaran simpul. Himpunan $N(a) = \{b \in V(G) : ab \in E(G)\}$ disebut persekitaran terbuka simpul a di G, sedangkan $N[a] = N(a) \cup \{a\}$ menyatakan persekitaran tertutup simpul a di G (Murtaza, Fazil, Javaid, & Benish, 2017). Pada artikel ini, dibahas tentang bilangan dominasi lokasi untuk graf sederhana, hingga, terhubung dan tak berarah yang merupakan graf hasil konstruksi dari *pan graph*. *Pan graph* merupakan graf yang dibentuk dari graf *cycle* C_n dan graf K_1 dengan menghubung salah satu titik di C_n ke K_1 sehingga terbentuk satu sisi penghubung (Sddiqui & James, 2018). Pada artikel ini, *pan graph* dinyatakan dengan $T_{n,1}$ (Ayhan & Omar, 2010). Graf *cycle* adalah graf sederhana dan teratur dengan masing-masing simpulnya memiliki derajat dua. Graf *cycle* dinotasikan C_n, dengan n menyatakan banyaknya simpul (Munir, 2010). Suatu graf baru dapat diperoleh menggunakan konsep *middle graph* dan *line graph*. Definisi mengenai *middle graph* diberikan pada Definisi 1 dan *line graph* pada Definisi 2.

Definisi 1 (Vaidya & Bantva, 2010)] *Middle graph dari suatu graf G dilambangkan $M(G)$ merupakan graf dengan himpunan simpul* $V\big(M(G)\big) = V(G) \cup E(G) = \{v_1, \cdots, v_{|V(G)|}, e_1, \cdots, e_{|E(G)|}\}$ *Dua simpul di $M(G)$ bertetangga jika dan hanya jika:*

1. $e_a \in V(M(G))$ *bertetangga dengan* $e_b \in V(M(G))$ *karena sisi* $e_a = v_i v_j \in E(G)$ *dan sisi* $e_b = v_j v_k \in E(G)$ *bersisian dengan simpul yang sama di G dengan $i \neq j$ dan $j \neq k$ dimana $i, j, k = 1, \cdots, |V(G)|$ dengan $a \neq b$ dimana $a, b = 1, \cdots, |E(G)|$.*
2. $v_i \in V(M(G))$ *bertetangga dengan* $e_a \in V(M(G))$ *karena sisi* $e_a = v_i v_j \in E(G)$ *bersisian dengan simpul* $v_i \in V(G)$ *dengan* $i \neq j$ *dimana* $i, j = 1, \cdots, |V(G)|$ *dan* $i \neq j$ *dimana* $a = 1, \cdots, |E(G)|$.

Definisi 2 (Roza, Narwen, & Zulakmal, 2014) *Misal diberikan graf $G = (V(G), E(G))$. Line graph dari G dilambangkan dengan $L(G)$ adalah graf dengan $V(L(G)) = E(G)$ dan simpul-simpul di $L(G)$ bertetangga jika dan hanya jika sisi-sisi yang bersesuaian saling bertetangga di G.*

Untuk suatu graf G yang diberikan, ilustrasi *line graph* G dan *middle graph* G dapat dilihat pada Gambar 1. Pada Gambar 1 (a) merupakan graf G, Gambar 1 (b) merupakan hasil konstruksi graf G menggunakan konsep *line graph* dan Gambar 1 (c) merupakan hasil konstruksi graf G menggunakan konsep *middle graph*.



(a) (b) (c)

Gambar 1. (a) Graf G, (b) Graf $L(G)$, (c) Graf $M(G)$

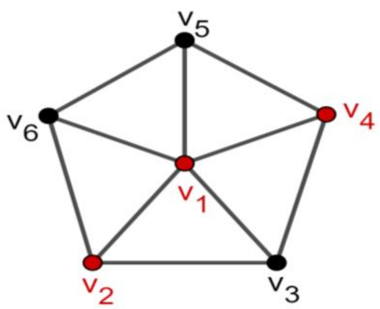
Langkah awal dalam penelitian ini adalah mengkonstruksi $M(T_{n,1})$ dan $L(T_{n,1})$ menggunakan Definisi 1 dan Definisi 2 dengan graf dasarnya yaitu $T_{n,1}$. Langkah selanjutnya, dicari himpunan dominasi masing-masing graf tersebut. Kemudian memeriksa apakah syarat himpunan dominasi lokasi dipenuhi oleh himpunan dominasi tersebut. Jika memenuhi dan mempunyai kardinalitas minimum, maka dapat diperoleh bilangan dominasi lokasi untuk graf $M(T_{n,1})$ dan $L(T_{n,1})$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada tahun 1960, himpunan dominasi mulai dipelajari dalam studi matematika dan berkembang hingga memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari (Kumar, 2011). Selain aplikasinya, terdapat beberapa variasi hasil pengembangan teori tentang himpunan dominasi dengan menambahkan syarat tertentu misalnya himpunan dominasi lokasi. Penerapan konsep himpunan dominasi lokasi telah dikaji oleh Slater pada tahun 1980an, yang mengaplikasikan konsep himpunan dominasi lokasi untuk membuat sebuah kode lokasi perlindungan pada beberapa fasilitas dengan menggunakan jaringan detektor (Balbuena, Foucaud, & Hansberg, 2015). Untuk lebih jelas terkait himpunan dominasi lokasi diberikan pada Definisi 3.

Definisi 3 (Chellali, Mimouni, & Slater, 2010) Diberikan graf G dengan himpunan simpul V. Himpunan $D \subseteq V$ merupakan himpunan dominasi lokasi jika D himpunan dominasi dan untuk setiap $u, v \in V - D$ dengan $u \neq v$ berlaku $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D \neq \emptyset$. Bilangan dominasi lokasi graf G *dinotasikan* $\gamma_L(G)$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokasi graf G.

Contoh 4 Misalkan graf Γ di Gambar 2, simpul berwarna merah menyatakan simpul-simpul pada salah satu himpunan dominasi di Γ.



Gambar 2. Dominasi Lokasi Graf Γ

Berdasarkan Gambar 2 dan Definisi 3, diperoleh himpunan dominasi lokasi graf $\boldsymbol{\Gamma}$ adalah $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_4}\}$, $\{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}\}$, $\{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_6}\}$ dan $\{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}, \boldsymbol{v_6}\}$. Oleh karena itu diperoleh, $\boldsymbol{\gamma_L(\Gamma) = 3}$.

Graf utama yang dirujuk pada penelitian ini adalah *pan graph* $\boldsymbol{T_{n,1}}$. Berikut diberikan

Proposisi 5 terkait bilangan dominasi lokasi graf $\boldsymbol{T_{n,1}}$.

Proposisi 5 (Yohana, Yundari, & Fran, 2020) Diberikan pan graph $(T_{n,1})$. Bilangan dominasi lokasi pada graf $T_{n,1}$,

$$\gamma_L(T_{n,1}) = \begin{cases} n-1\,, n = 3,4 \\ \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor + 1\,, n \geq 5 \end{cases}$$

Pembahasan utama pada artikel ini adalah terkait bilangan dominasi lokasi dari *line pan graph* dan *middle pan graph*. Hasil yang telah diperoleh dinyatakan pada Teorema 6 dan Teorema 8.

Teorema 6 *Jika* $L(T_{n,1})$ *adalah line graph dari pan graph maka* $\gamma_L\left(L(T_{n,1})\right) = \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor + 1, n \geq 3.$

Bukti: Diberikan graf $T_{n,1}$ dengani $V(T_{n,1}) = E(T_{n,1}) = n + 1.$ Berdasarkan definisi *line graph* dapat diketahui $V\left(L(T_{n,1})\right) = E(T_{n,1})$ sehingga $V\left(L(T_{n,1})\right) = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, e_{n+1}\}.$ Simpul e_{n+1} dan simpul e_2 pada $L(T_{n,1})$ mendominasi 3 simpul dan simpul lainnya hanya mendominasi 2 simpul.

Kasus 1: untuk $n = 3$ dan $n = 4$

Pada $L(T_{3,1})$dan $L(T_{4,1})$ diperoleh himpunan dominasi yaitu $D_1 = \{e_1, e_4\}$. Himpunan $V - D_1 = \{e_2, e_3\}$ pada $L(T_{3,1})$ berlaku $N(e_2) \cap D_1 \neq N(e_3) \cap D_1 \neq \emptyset$ dan himpunan $V - D_1 = \{e_2, e_3, e_5\}$ pada $L(T_{4,1})$ berlaku $N(e_2) \cap D_1 \neq N(e_3) \cap D_1 \neq N(e_5) \cap D_1 \neq \emptyset$ sehingga $D_1 = \{e_1, e_4\}$ adalah himpunan dominasi lokasi untuk $L(T_{3,1})$ dan $L(T_{4,1})$ dengan $|D_1| = 2$ yang merupakan himpunan dominasi lokasi dengan kardinalitas minimum. Akibatnya, berdasarkan Definisi 3, maka $\gamma_L\left(L(T_{3,1})\right) = \gamma_L\left(L(T_{4,1})\right) = 2 = \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor + 1.$

Kasus 3: untuk $n \geq 5$

Diberikan graf $L(T_{n,1})$ dan misalkan $D = \{D_3, D_4, D_5\}$:

(i) Untuk $n = 5k$ dan $n = 5k + 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$ diperoleh himpunan dominasi yaitu

$$D_3 = \{e_1\} \cup \left\{ e_4, e_6, \cdots, e_{5\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - 1}, e_{5\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1} \right\}$$

(ii) Untuk $n = 5k + 2, k \in \mathbb{N}$ diperoleh himpunan dominasi,

$$D_4 = \{e_2\} \cup \left\{ e_4, e_7, \cdots, e_{5\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - 1}, e_{5\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 2} \right\}$$

(iii) Untuk n lainnya himpunan dominasi dari $L(T_{n,1})$,

$$D_5 = \{e_1\} \cup \{e_4\} \cup \left\{ e_6, e_9, \cdots, e_{5\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1}, e_{5\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 4} \right\}$$

Setiap himpunan D_i, $i = 3, 4, 5$ secara terurut mempunyai indeks antar simpul dengan selisih 2 atau 3, akibatnya untuk $e_a, e_b \in V - D_i$ dengan $e_a \neq e_b$ diperoleh

$N(e_a) \cap D_i \neq \emptyset$ dan $N(e_b) \cap D_i \neq \emptyset$. Berdasarkan D_i, $i = 3, 4, 5$ maka pada simpul-simpul pada $V - D_i$ mempunyai indeks antar simpul dengan selisih 1 atau 2 secara berurutan. Oleh karena itu, $N(e_a) \cap D_i \neq N(e_b) \cap D_i$. Berdasarkan Definisi 3, maka himpunan D_i merupakan himpunan dominasi lokasi. Selanjutnya, indeks-indeks dari e dapat dapat dibentuk menjadi himpunan indeks:

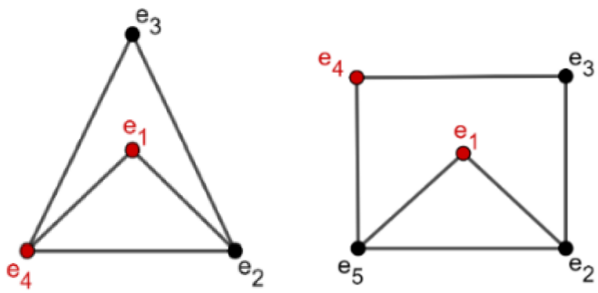
$$D_3' = \{1\} \cup \left\{6, 11, 16, 21, \cdots, 5\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor + 1\right\} \cup \left\{4, 9, 14, 19, \cdots, 5\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor - 1\right\}$$

$$D_4' = \{2\} \cup \left\{7, 12, 17, 22, \cdots, 5\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor + 2\right\} \cup \left\{4, 9, 14, 19, \cdots, 5\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor - 1\right\}$$

$$D_5' = \{1\} \cup \{4\} \cup \left\{6, 11, 16, \cdots, 5\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor + 1\right\} \cup \left\{9, 14, 19, \cdots, 5\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor + 4\right\}$$

Kardinalitas masing-masing D_i', $i = 3, 4, 5$ dapat diperoleh dengan memanfaatkan rumus barisan aritmatika. Oleh karena itu, untuk $n = 5k$, $n = 5k + 1$, $n = 5k + 2$ diperoleh $|D_3| = |D_4| = 1 + \left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor$ dan $|D_5| = 1 + 1 + \left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor$ untuk n lainnya. Dengan demikian, diperoleh $\gamma_L(L(T_{n,1})) \leq \left\lfloor\frac{2n}{5}\right\rfloor + 1$. Selanjutnya, andaikan $\gamma_L(L(T_{n,1})) = \left\lfloor\frac{2n}{5}\right\rfloor$. Akibatnya, untuk simpul-simpul pada himpunan dominasi lokasi dengan $\left\lfloor\frac{2n}{5}\right\rfloor$ simpul, merupakan simpul yang mendominasi 2 simpul disekitarnya atau simpul yang mendominasi 3 simpul disekitarnya. Oleh karena itu, terdapat setidaknya simpul e_1, e_n di $V - D$ dengan tetangga sama di D dan untuk $L(T_{7,1})$ ada simpul yang tidak terdominasi (kontradiksi dengan Definisi 3). Jadi dapat disimpulkan bahwa $\gamma_L(L(T_{n,1})) = \left\lfloor\frac{2n}{5}\right\rfloor + 1$ untuk $n \geq 5$. ■

Contoh 7 Diberikan graf $L(T_{3,1})$dan $L(T_{4,1})$ seperti yang terdapat di Gambar 3.



(a) (b)

Gambar 3. (a) Graf $L(T_{3,1})$ dan (b) Graf $L(T_{4,1})$

Berdasarkan Gambar 3.(a), himpunan dominasi untuk graf $L(T_{3,1})$ yaitu $D_1 = \{e_1, e_4\}$ dan $e_2, e_3 \in V\left(L(T_{3,1})\right) - D_1$ dengan $N(e_2) \cap D_1 \neq \emptyset$ dan $N(e_3) \cap D_1 \neq \emptyset$ yang berarti D_1 menjangkau simpul-simpul di $V\left(L(T_{3,1})\right) - D_1$. Diperoleh juga bahwa $N(e_2) \cap D_1 \neq N(e_3) \cap D_1$ yang artinya D_1 himpunan dominasi lokasi dan

$\gamma_L\left(L(T_{3,1})\right) = 2$. Hal serupa juga berlaku untuk graf $L(T_{4,1})$ pada Gambar 3 (b), dengan himpunan dominasi lokasinya $D_2 = \{e_1, e_4\}$ dan $\gamma_L\left(L(T_{4,1})\right) = 2$.

Teorema 8 *Jika $M(T_{n,1})$ adalah middle graph dari pan graph maka diperoleh* $\gamma_L\left(M(T_{n,1})\right) = \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor + 1, n \geq 3$.

Bukti: Diberikan graf $T_{n,1}$ dengan $V(T_{n,1}) = E(T_{n,1}) = n + 1$. Menggunakan Definisi 1, $M(T_{n,1})$ mempunyai $2n + 2$ simpul dengan, $V\left(M(T_{n,1})\right) = \{v_1, u_1, v_2, u_2, \cdots, u_{n+1}, v_{n+1}\}$. Derajat simpul $u_1, u_3, \cdots, u_n$ adalah 4 dan u_2, u_{n+1} berderajat 5. Derajat simpul $v_3, v_4, v_5, v_6, \cdots, v_{n+1}$ adalah 2, v_1 berderajat 1, dan v_2 berderajat 3. Pilih $u_i \in V\left(M(T_{n,1})\right)$, $i = 1, 3, \cdots, n$ dengan masing-masing u_i mendominasi 4 simpul disekitarnya dengan u_2 dan u_{n+1} mendominasi 5 simpul disekitarnya. Akibatnya, himpunan berikut merupakan himpunan dominasi untuk $M(T_{n,1})$ yaitu:

(i) $D_1 = \{u_1\} \cup \left\{u_2, u_4, \cdots, u_{3\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - 1}, u_{3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1}\right\}$ untuk $n = 3k, k \in \mathbb{N}$

(ii) $D_2 = \{u_1\} \cup \{u_2\} \cup \left\{u_4, u_5, \cdots, u_{3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1}, u_{3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2}\right\}$ untuk n lainnya.

Setiap simpul $v_i \in V\left(M(T_{n,1})\right)$ minimal bertetangga dengan satu simpul $u_i \in D_j$ dengan $j = 1,2$ pada $M(T_{n,1})$, sehingga terdapat setidaknya satu simpul $u_i \in D_j$ yang mendominasi simpul $v_i \in V\left(M(T_{n,1})\right)$. Akibatnya, untuk $v_i \in V\left(M(T_{n,1})\right)$ dengan $i = 1, 2, \cdots, n + 1$ diperoleh $N(v_i) \cap D_j \neq \emptyset$. Setiap simpul u_i pada $M(T_{n,1})$ bertetangga dengan simpul u_{i-1} dan u_{i+1}, dan masing-masing himpunan dominasi tersebut memiliki simpul-simpul secara terurut dengan selisih antar indeks adalah 1 atau 2 maka diperoleh $N(u_i) \cap D_j \neq \emptyset$. Untuk setiap simpul $v_i \in V - D_j$ dengan $i = 3, 4, \cdots, n + 1$ bertetangga dengan simpul $u_{i-1,} u_i$ dan setiap u_i pada salah satu himpunan dominasi yang dipilih memiliki indeks dengan selisih 1 atau 2 secara terurut maka berakibat $v_i \in V - D_j$ memiliki tetangga yang berbeda di D_j dan $N(v_i) \cap D_j \neq \emptyset$. Untuk setiap simpul $u_i \in V - D_j$ yang bertetangga dengan simpul $v_i, v_{i+1}, u_{i-1,} u_{i+1}$ maka masing-masing simpul pada himpunan D_j memiliki indeks selisih 1 atau 2. Dengan demikian, masing-masing $u_i \in V - D_j$ memiliki tetangga yang berbeda di D_j. Karena $u_i \in V - D$ bertetangga dengan simpul $v_i, v_{i+1}, u_{i-1,} u_{i+1}$dan $v_i \in V - D_j$ dengan $i = 3, 4, \cdots, n + 1$ bertetangga dengan simpul $u_{i-1,} u_i$ maka simpul $u_i \in V - D_j$ minimal didominasi oleh

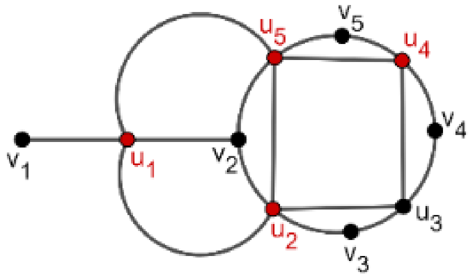
2 simpul pada D_j dan $v_i \in V - D_j$ dengan $i = 3, 4, n+1$ minimal didominasi oleh 1 simpul pada D_j. Untuk simpul v_1 hanya didominasi oleh simpul $u_1 \in D_j$ dan simpul v_2 bertetangga dengan simpul u_1, u_2, u_{n+1} dan masing-masing simpul secara terurut pada D_j memiliki indeks selisih 1 atau 2 sehingga simpul v_2 minimal didominasi oleh 2 simpul pada D_j. Akibatnya $N(v_i) \cap D_j \neq N(u_i) \cap D_j$ dengan $v_i, u_i \in V - D_j$. Oleh karena itu, D_j merupakan himpunan dominasi lokasi dari $M(T_{n,1})$. Berdasarkan indeks-indeks simpul u pada D_j diperoleh:

$$D_1' = \{1\} \cup \left\{2, 5, 8, 11, \cdots, 3\left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor - 1\right\} \cup \left\{4, 7, 10, 13, \cdots, 3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor + 1\right\}$$

$$D_2' = \{1\} \cup \{2\} \cup \left\{4, 7, 10, 13, \cdots, 3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor + 1\right\} \cup \left\{5, 8, 11, 14, \cdots, 3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor + 2\right\}$$

Kardinalitas masing-masing D_j', $j = 1, 2$ dapat diperoleh dengan memanfaatkan rumus barisan aritmatika. Oleh karena itu, untuk $n = 3k$ diperoleh $|D_1| = 1 + \left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ dan untuk n lainnya, $|D_2| = 1 + 1 + \left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 3, $\gamma_L\left(M(T_{n,1})\right) \leq \left\lfloor\frac{2n+1}{3}\right\rfloor + 1$. Selanjutnya, andaikan $\gamma_L\left(M(T_{n,1})\right) = \left\lfloor\frac{2n+1}{3}\right\rfloor$, maka himpunan dominasi lokasi graf $M(T_{n,1})$ memiliki $\left\lfloor\frac{2n+1}{3}\right\rfloor$ simpul. Akibatnya, untuk graf $M(T_{n,1})$, paling tidak terdapat simpul $v_1, v_2 \in V - D$ dengan tetangga yang sama di D (kontradiksi dengan Definisi 3). Jadi dapat disimpulkan bahwa $\gamma_L\left(M(T_{n,1})\right) = \left\lfloor\frac{2n+1}{3}\right\rfloor + 1$. ■

Contoh 9 Diberikan graf $M(T_{4,1})$ seperti yang terdapat di Gambar 4.



Gambar 4. *Middle Pan Graph* $M(T_{4,1})$

Berdasarkan Gambar 4, $D = \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$ merupakan himpunan dominasi graf $M(T_{4,1})$, simpul-simpul yang tidak ada di D yaitu v_1, v_2, v_3, u_3, v_4 dan v_5. Berdasarkan Gambar 4, $N(v_1) \cap D \neq \emptyset$, $N(v_2) \cap D \neq \emptyset$, $N(v_3) \cap D \neq \emptyset$, $N(u_3) \cap D \neq \emptyset$, $N(v_4) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(v_5) \cap D \neq \emptyset$. Oleh karena itu, D menjangkau simpul-simpul di $V - D$. Diperoleh juga bahwa, $N(v_1) \cap D \neq N(v_2) \cap D \neq N(v_3) \cap D \neq N(u_3) \cap D \neq N(v_4) \cap D \neq N(v_5) \cap D$. Dengan demikian, D merupakan himpunan dominasi lokasi. Oleh karena D himpunan dominasi dengan kardinalitas minimum, maka diperoleh $\gamma_L\left(M(T_{4,1})\right) = 4$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan, bilangan dominasi lokasi yang diperoleh untuk *line pan graph* dan *middle pan graph* berturut-turut adalah $\gamma_L(L(T_{n,1})) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil + 1$ dan $\gamma_L\left(M(T_{n,1})\right) = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil + 1$. Untuk $n \geq 5$, diperoleh bahwa $\gamma_L(L(T_{n,1})) = \gamma_L(T_{n,1})$.

DAFTAR PUSTAKA

Ayhan, A., & Omar, A. (2010). Determination and Testing the Domination Numbers of Tadpole Graph, Book Graph and Stacked Graph Using MATLAB. *College of Basic Education Researchers Journal*, *10*(1), 491-504.

Balbuena, C., Foucaud, F., & Hansberg, A. (2015). Locating-dominating sets and indentifying codes in graphs of Girth at least 5. *The Electronic Journal of Combinatorics*, *22*(2), 1-15.

Canoy, S., & Malacas, G. (2014). Locating-Dominating sets in Graphs. *Applied Mathematics Sciences*, *8*(88), 4381-4388.

Chellali, M., Mimouni, M., & Slater, P. (2010). On Locating-Domination in Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, *30*, 223-235.

Foucaud, F., Mertzios, G., R Naserasr, A. P., & Valicov, P. (2016). Indentification location-domination and metric dimension interval and permutation graph II Algorithms and complexity. *Algorithmicai*, *78*(3), 914-944.

Hernando, C., Mora, M., & Pelayo, M. (2018). Locating Domination in Bipartite Graphs and their complements. *Department de Matematiques*, *2*, 1-15.

Kumar, K. (2011). Graph Theoretic Parameters Applicable to Social Network. *Math. Combin Book Series*, *3*, 76-81.

Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit.* Bandung: Informatika.

Murtaza, M., Fazil, M., Javaid, I., & Benish, H. (2017). Locating-Dominating Set of Functigraphs. *Mathematics Subject Classification*, *1*, 1-14.

Roza, I., Narwen, & Zulakmal. (2014). Graf Garis dari Graf Siklus, Graf Lengkap dan Graf Bintang. *Jurnal Matematika UNAND*, *3*(2), 1-4.

Santoso, B., Djuwandi, & Soelistyo, R. (2012). Bilangan dominasi dan bilangan kebebasan graf bipartit kubik. *Jurnal Matematika*, *15*(1).

Sddiqui, N., & James, M. (2018). Domination and Chromatic Number of Pan Graph and Lollipop Graph. *International Journal of Technical Innovation in Modern Engineering and Sciences(IJTIMES)*, *10*(1), 932-939.

Vaidya, S., & Bantva, D. (2010). The L(2,1)-Labeling of some Middle Graphs. *Journal of applied Computer Sciences and Mathematics, 9*(4), 104-107.

Yohana, E., Yundari, & Fran, F. (2020). Bilangan dominasi lokasi pada pan graph. *Buletin ilmiah Matematika, Statistika dan terapannya (Bimaster), 2*, 261-266.