Edumatsains, 5(2) Januari 2021, 203-210

**EduMatSains**

**Jurnal Pendidikan, Matematika dan Sains**

http://ejournal.uki.ac.id/index.php/edumatsains

# PENENTUAN RUMUS BILANGAN REPRODUKSI DASAR PADA MODEL MATEMATIKA COVID-19 DARI MODEL SIR YANG DIMODIFIKASI

**Anna Angela Sitinjak[1*]**

[1] Politeknik Teknologi Kimia Industri, Sumatera Utara

Diterima: 26 Oktober 2020     Direvisi: 27 Desember 2020     Diterbitkan : 10 Januari 2021

## ABSTRACT

The spread of COVID-19 has occurred and is unsettling many countries, not only the number of patients is increasing but also the economy is disrupted. Mathematical models can be used to assist in making decisions by describing both exposed and infected conditions. From the mathematical model, especially infectious diseases, the basic reproduction number can be seen. Therefore, this study aims to find the basic reproduction number of the mathematical model COVID-19 modified with various approaches using parameters close to daily life. The basic reproduction number, $R_0$, will be free from disease if $R_0 < 1$ and endemic if $R_0 > 1$. The method used is modifying the Mathematical Model SIR to become the Mathematical Model COVID-19 by considering the isolation that is currently done to reduce the spread of COVID-19, then looking for the disease-free equilibrium point and analyzed its stability by determining the eigenvalues of the Jacobian matrix. From the eigenvalues, the study result is obtained, namely Basic Reproduction Number, $R_0 = \frac{c\beta(\alpha+\delta+\mu)}{\mu(\delta+\mu)(\alpha+\mu+\omega)}$.

**Keywords:** Mathematical Model, COVID-19, Basic Reproduction Number.

## PENDAHULUAN

Pertumbuhan suatu populasi tidak lepas dari pengaruh kelahiran dan kematian. Ada berbagai faktor yang menyebabkan kematian, salah satunya adalah penyakit termasuk yang diakibatkan oleh virus. Virus Corona tipe baru yang dikenal dengan Covid-19 telah mengakibatkan kematian pada berbagai negara karena penyebaran virus ini yang cepat. Di Indonesia, penyebaran Covid-19 mengakibatkan kematian hampir3,7 persen. Jenis virus ini pertama kali dilaporkan oleh daerah Wuhan, Cina dan dalam waktu yang singkat (kurang lebih 14 hari) dapat menyebabkan kematian. Penyebaran Covid-19 terjadi dari manusia ke manusia melalui air liur yang masuk ke pernapasan (Cao, et al., 2020). Covid-19 menggugah semua pihak untuk melakukan tindakan dan menemukan pengobatan yang terbaik.

Model matematika dapat membantu untuk memahami pada kondisi apa penyebaran berlanjut atau berhenti. Penelitian – penelitian mengenai penyebaran covid-19 dengan menggunakan model matematika dilakukan. Batista (2020) meneliti mengenai estimasi penyebaran

***Correspondence Address**
E-mail: annaangelasitinjak@yahoo.co.id

Virus Covid-19 dengan Model Regresi Logistik. Anirudh (2020) menggunakan berbagai model matematika covid-19 untuk menggambarkan perilaku dinamis dan adanya penelitian lain yang memprediksi kasus Covid-19 di berbagai negara seperti negara cina (Sun,et al., 2020) dan Jepang (Kuniya, 2020).

Penyebaran virus ini terjadi diantara manusia dengan gejala yang mirip influenza namun ditambah dengan adanya sesak nafas yang mengakibatkan pasien sulit bernafas (kekurangan oksigen). Hal ini mengakibatkan terbentuknya kelompok yang rentan, terpapar, terinfeksi dan sembuh. Karena penyebarannya yang sangat cepat dan belum ditemukannya obat yang tepat, maka yang dapat dilakukan saat ini adalah melakukan isolasi yang diharapkan dapat mengurangi kontak secara langsung dengan kelompk terinfeksi, sehingga ditambah kelompok yang melakukan isolasi.

Untuk mengetahui tingkat penyebaran apakah ada peningkatan atau penurunan jumlah individu yang terinfeksi diperlukan parameter Basic Reproduction Number ($R_0$). $R_0 > 1$ menyatakan terjadi epidemik sedangkan $R_0 < 1$ menyatakan bebas penyakit (Driessche dan Watmough, 1945). Penentuan bilangan reproduksi dasar telah banyak dilakukan peneliti dalam melihat penyebaran suatu penyakit epidemik. Resmawan dan Nurwan (2017) mengkonstruksi bilangan reproduksi pada model epidemic SEIRS-SEI untuk melihat penyebaran malaria. Windawati, dkk (2020) meneliti penyebaran penyakit demam berdarah dengan menganalisa kestabilan model matematika berdasarkan nilai bilangan reproduksi yaitu agar bebas penyakit nilai bilangan reproduksi dasar $R_0 < 1$ dan dengan simulasi diperoleh $R_0 = 0,998741$.

Bilangan reproduksi dasar memiliki peranan dalam melihat penyebaran penyakit, namun ada baiknya diketahui terlebih dahulu rumus bilangan reproduksi dasar dari model matematika yang digunakan. Karena itu, pada jurnal ini akan ditentukan rumus bilangan reproduksi dasar pada Model Matematika Covid-19 yang dimodifikasi dari Model SIR.

## KAJIAN LITERATUR

### 1. Eigenvalues

Nilai eigen suatu matriks perlu diketahui untuk menentukan apakah titik setimbang stabil atau tidak. Misalkan $Ax = \lambda x$ dengan A adalah matriks bujur sangkar, Vektor tak-nol x di dalam $R^n$ adalah vektor eigen dari A dan $\lambda$ adalah nilai eigen.

Menurut Anton (1987), $Ax = \lambda x$ adalah ekuivalen dengan $Ax = \lambda Ix$ atau $(A-\lambda I)x = 0$ dengan I matriks identitas. Persamaan ini akan mempunyai penyelesaian non-trivial (tak-nol) jika dan hanya jika $\det(A- \lambda I) = 0$. Nilai eigen matriks Jacobian mempunyai bagian real negatif yang artinya titik kesetimbangan stabil (Perko, 2001).

**2. Bilangan Reproduksi Dasar ($R_0$)**

Salah satu parameter yang dapat digunakan untuk melihat tingkat penyebaran suatu penyakit adalah dengan menggunakan Bilangan Reproduksi Dasar. Apabila nilai dari Bilangan Reproduksi Dasar tinggi maka tingkat penyebaran penyakit juga tinggi dalam hal ini terjadi endemik. Agar kemungkinan indvidu terinfeksi tidak ada lagi maka dilihat $R_0 < 1$ yang menunjukkan apakah satu individu itu menginfeksi kurang dari satu individu rentan (penyebaran tidak ada).

Tetapi, jika Bilangan Reproduksi dasar lebih dari satu ($R_0 > 1$) maka terjadi penyebaran (satu individu menginfeksi lebih dari satu individu rentan. Bilangan Reproduksi Dasar ($R_0$) < 1 jika dan hanya jika semua nilai eigen mempunyai bagian real negatif ( Brauer & Castillo, 2011).

## METODE PENELITIAN

Model matematika SIR telah banyak digunakan dalam menganalisis kondisi penyakit menular. Pada model ini diasumsikan bahwa penyakit yang diteliti tidak termasuk penyakit turunan, status sosial, pekerjaan, gender dan umur tidak mempengaruhi penyebaran penyakit serta laju pertumbuhan populasi dianggap konstan, dengan model matematika SIR sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \omega I$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega I$$

Jika suatu populasi dikarakteristikan dengan laju kematian $\mu$ dan laju kelahiran $c$, serta adanya penularan penyakit, model SIR dimodifikasi (Setiawan, 2017) menjadi:

$$\frac{dS}{dt} = c - \mu S - \frac{\beta SI}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \omega I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega I - \mu R$$

Dalam beberapa kasus, populasi yang rentan belum sepenuhnya terinfeksi atau dikenal adanya populasi terpapar. Namun laju kelahiran diasumsikan sama dengan laju kematian, adapun $\alpha$ sebagai parameter laju populasi terpapar yang menjadi populasi infeksi, maka Model SIR menjadi Model SEIR (Suspected, Exposed, Infected, Recoverd) (Sulistioningtias & Lestari, 2018):

$$\frac{dS}{dt} = cN - \mu S - \frac{\beta SI}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \alpha)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - (\omega + \mu)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega I - \mu R$$

Pada masalah penyakit Covid-19, untuk mengurangi penyebarannya, pasien yang memiliki gejala (terpapar) dilakukan isolasi hingga diketahui dengan pasti apakah positif covid-19 atau tidak, serta yang terinfeksi juga dilakukan isolasi. Model Matematika Covid-19 dengan mempertimbangkan kelompok isolasi adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = cN - \mu S - \frac{\beta S}{N}(E + I) \qquad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta S}{N}(E + I) - (\omega + \mu + \alpha)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - (\delta + \mu)I$$

$$\frac{dQ}{dt} = \omega E + \delta I - \theta Q - \mu Q$$

$$\frac{dR}{dt} = \theta Q - \mu R$$

**Tabel 1.** Keterangan Parameter

| Simbol Parameter | Keterangan |
|---|---|
| **c** | Laju kelahiran |
| N | Total Populasi |
| $\mu$ | Laju Kematian |
| $\beta$ | Laju populasi rentan yang dapat menjadi terpapar dan terinfeksi |
| S | Populasi rentan |
| E | Populasi yang terpapar |
| I | Populasi yang terinfeksi (positif covid-19) |
| Q | Populasi yang isolasi |
| R | Populasi sembuh |
| $\omega$ | Laju populasi terpapar yang diisolasi |
| $\alpha$ | Laju populasi terpapar yang dinyatakan positif covid-19 (terinfeksi) |
| $\delta$ | Laju populasi terinfeksi yang isolasi |
| $\theta$ | Laju populasi terisolasi yang sembuh |

Karena yang dibutuhkan pada saat kondisi bagaimana agar bebas dari penyakit Covid-19, maka akan dicari titik kesetimbangan bebas penyakit ($E_0$) dari Model Matematika Covid-19 tersebut, kemudian dianalisis dengan matriks Jacobian dan diperoleh nilai eigen dengan ketentuan kestabilan titik tetap yaitu nilai eigen $\lambda < 0$, yang pada akhirnya dari nilai eigen akan ditemukan formula atau rumus bilangan reproduksi dasar ($R_0$).

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Bilangan reproduksi dasar, $R_0$, dapat dijadikan sebagai bahan pertimbangan dalam melihat atau memprediksi tingkat penyebaran penyakit Covid-19, dengan syarat $R_0 > 1$ menyatakan terjadi epidemik sedangkan $R_0 < 1$ menyatakan bebas penyakit. Karena itu perlu diketahui rumus Bilangan Reproduksi Dasar agar nantinya pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan simulasi untuk memperoleh angka atau nilai bilangan reproduksi dasar. Sehingga pada jurnal ini, hanya bertujuan pada penentuan rumus Bilangan Reproduksi Dasar dari Model Matematika Covid-19 yang telah dimodifikasi (Persamaan 2):

$$\frac{dS}{dt} = cN - \mu S - \frac{\beta S}{N}(E + I)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta S}{N}(E + I) - (\omega + \mu + \alpha)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - (\delta + \mu)I$$

$$\frac{dQ}{dt} = \omega E + \delta I - \theta Q - \mu Q$$

$$\frac{dR}{dt} = \theta Q - \mu R \qquad (2)$$

Titik kesetimbangan diperoleh pada saat

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dQ}{dt} = 0$$

dengan kondisi awal $S(0) \geq 0$, $E(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, $Q(0) \geq 0$.

Titik kesetimbangan bebas penyakit ($E_o$) yang artinya kondisi pada saat populasi terinfeksi sudah tidak ada lagi atau nol yang akibatnya populasi terpapar dan isolasi juga nol ($E=I=Q=0$).

$$\frac{dS}{dt} = cN - \mu S - \frac{\beta S}{N}(E + I) = 0$$

$$\leftrightarrow cN - \mu S - \frac{\beta S}{N}(E + I) = 0$$

$$\leftrightarrow cN - \mu S = 0$$

$$\leftrightarrow cN = \mu S$$

$$\leftrightarrow S = \frac{cN}{\mu}$$

Karena itu, titik tetap bebas penyakit, $E_0 = \{\frac{cN}{\mu}, 0, 0, 0\}$. Untuk menganalisis kestabilan titik tetap bebas penyakit, $E_0$, ditentukan nilai eigen dari matriks Jacobian:

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta S}{N}(E+I) & -\frac{\beta S}{N} & -\frac{\beta S}{N} & 0 \\ \frac{\beta}{N}(E+I) & \frac{\beta S}{N} - (\omega + \mu + \alpha) & \frac{\beta S}{N} & 0 \\ 0 & \alpha & -\delta - \mu & 0 \\ 0 & \omega & -\delta & -\theta - \mu \end{bmatrix}$$

Pelinearan disekitar titik tetap $E_0$:

$$JE_0 = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta c}{\mu} & -\frac{\beta c}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\beta c}{\mu} - (\omega + \mu + \alpha) & \frac{\beta c}{\mu} & 0 \\ 0 & \alpha & -\delta - \mu & 0 \\ 0 & \omega & -\delta & -\theta - \mu \end{bmatrix}$$

det ($JE_0 - \lambda I$) = 0; dengan I adalah matriks identitas, maka:

$$JE_0 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\mu-\lambda & -\frac{\beta c}{\mu} & -\frac{\beta c}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\beta c}{\mu} - (\omega+\mu+\alpha) - \lambda & \frac{\beta c}{\mu} & 0 \\ 0 & \alpha & -\delta-\mu-\lambda & 0 \\ 0 & \omega & -\delta & -\theta-\mu-\lambda \end{bmatrix}$$

$\det(JE_0 - \lambda I) = 0$

$$\left(\frac{(-\mu-\lambda)(\theta+\mu+\lambda)(-\alpha\delta\mu-\alpha\mu^2-\delta\lambda\mu-\delta\mu^2-\delta\mu\omega-\lambda^2\mu-2\lambda\mu^2-\lambda\mu\omega-\mu^3-\mu^2\omega+\beta c\alpha+\beta c\delta+\beta c\lambda+\beta c}{\mu}\right) = 0$$

dengan eigen values:

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = -(\theta+\mu)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{-\alpha\mu-\delta\mu-2\mu^2-\omega\mu+\beta c+\sqrt{\alpha^2\mu^2-2\alpha\delta\mu^2+2\alpha\mu^2\omega+\delta^2\mu^2-2\delta\mu^2\omega+\mu^2\omega^2+2\beta c\alpha\mu+2\beta c\delta\mu-2\beta c\mu\omega+\beta c^2}}{\mu}\right)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{-\alpha\mu-\delta\mu-2\mu^2-\omega\mu+\beta c-\sqrt{\alpha^2\mu^2-2\alpha\delta\mu^2+2\alpha\mu^2\omega+\delta^2\mu^2-2\delta\mu^2\omega+\mu^2\omega^2+2\beta c\alpha\mu+2\beta c\delta\mu-2\beta c\mu\omega+\beta c^2}}{\mu}\right)$$

Agar titik tetap bebas penyakit, Eo, stabil maka eigenvalues bernilai negatif, untuk $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ telah diperoleh bernilai negatif, serta untuk $\lambda_{3,4}$ agar bernilai negatif maka $\lambda_{3,4} < 0$. Kita ambil $\lambda_3$ untuk menentukan syarat agar bernilai negatif:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-\alpha\mu-\delta\mu-2\mu^2-\omega\mu+\beta c+\sqrt{\alpha^2\mu^2-2\alpha\delta\mu^2+2\alpha\mu^2\omega+\delta^2\mu^2-2\delta\mu^2\omega+\mu^2\omega^2+2\beta c\alpha\mu+2\beta c\delta\mu-2\beta c\mu\omega+\beta c^2}}{\mu}\right) < 0$$

diperoleh: $\frac{c\beta(\alpha+\delta+\mu)}{\mu(\delta+\mu)(\alpha+\mu+\omega)} < 1$.

Ini artinya, sistem (Persamaan 2) stabil jika $\frac{c\beta(\alpha+\delta+\mu)}{\mu(\delta+\mu)(\alpha+\mu+\omega)} < 1$ dan tidak stabil jika $\frac{c\beta(\alpha+\delta+\mu)}{\mu(\delta+\mu)(\alpha+\mu+\omega)} > 1$.

Dari perhitungan di atas, diperoleh rumus Bilangan Reproduksi Dasar, $R_0 = \frac{c\beta(\alpha+\delta+\mu)}{\mu(\delta+\mu)(\alpha+\mu+\omega)}$.

## KESIMPULAN

Penyebaran Covid-19 sangat mengejutkan, selain penyebarannya yang cepat diantara manusia melalui saluran pernafasan yang merupakan alat vital sangat penting bagi manusia, juga tingkat kematiannya yang tinggi. Berbagai upaya telah dilakukan termasuk melalui penelitian untuk mengurangi penyebaran Covid-19, salah satunya dengan karantina (isolasi). Dengan memasukkan asumsi-asumsi (pendekatan) maka suatu populasi dikelompokkan menjadi lima kelompok, yaitu kelompok rentan, kelompok terpapar, kelompok terinfeksi, kelompok isolasi dan kelompok sembuh. Melalui pendekatan tersebut, terbentuk Model Matematika Covid-19 yang dimodifikasi dari Model SIR dengan rumus Bilangan Reproduksi Dasar, $R_0 = \frac{c\beta(\alpha+\delta+\mu)}{\mu(\delta+\mu)(\alpha+\mu+\omega)}$ .

## DAFTAR PUSTAKA


Anirudh, A. (2020). Mathematical Modelling and the Transmission Dynamics in Predicting the Covid-19-What Next in Combating the Pandemic. *Infectious Disease Modelling*, 5, 366-374. https://doi.org/10.1016/j.idm.2020.06.002

Anton, Howard and Chris Rorres. (2005). *Elementary Linar lgebra Application Version*. John Waley & Sons: U.S.

Batista, Milan. (2020). Estimation of Final Size of the Coronavirus Epidemic by the Logistic Model (update 4). https://www.researchgate.net/publication/339240777

Brauer, F. and C. Castillo. (2011). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, 2$^{th}$ Edition*. New York: Springer.

Cao,J., X. Hu, W. Cheng, L.Yu, W.J. Tu and Q. Liu. (2020).Clinical Features and Short-Term Outcomes of 18 patients with Coona Virus Disease 19 in Intensive Care Unit. *Intensive Care Medicine*, 46(5), 851-853. https://doi.org/10.1007/s00134-020-05987-7

Driessche, P. and J. Watmough. (1945). *Further Notes on the Basic Reproduction Number. Mathematical Epidemiology*, Victoria: Springer.

Kuniya, Toshikazu. (2020). Prediction of theEpidemic Peak of Coronavirus Disease in Japan. *Journal of Clinical Medicine*, 9(3), 789, https://doi.org/10.3390/jcm9030789

Perko, Lawrence. (2001. *Differential Equations: Third Edition*. New York: Springer.

Resmawan, Nurwan. (2017). Konstruksi Bilangan Reproduksi pada Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan. *Jurnal Matematika*

*Integratif*, 13 (2), 105-114, https://doi.org/10.24198/jmi.v13.n2.12332.105-114

Setiawan, Nur Fajar. (2017). Analisis dan Simulasi Model SITR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar. *Skripsi*, Makassar: Universitas Negeri Makassar.

Sulistioningtias, Eko Saputro dan Dwi Lestari. (2018). Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Malaria dengan Model SEIR. *Journal student uny*. 7(5), http://journal.student.uny.ac.id/ojs/index.php/math/article/view/12444

Sun, H., Y. Qiu, H. Yan, Y. Huang, Y. Zhu and S.X.Chen. (2020). Tracking and Predicting Covid-19 Epidemic in China Mainland. medRxiv. https://doi.org/10.1101/2020.02.17.2024257

Susanti, Novita Dwi. (2016). Analisa Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar ($R_0$) pada Model Matematika Dinamika Malaria Host-Vector. *Skripsi*, Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.

Teguh, Rony, Abertun Sigit Sahay dan Fengky F Adji. (2020). Pemodelan Penyebaran Infeksi COVID-19 di Kalimantan 2020. https://www.researchgate.net/publication/341709835

Windawati, Siti, Ali Shodiqin dan Aurora Nur Aini. (2020). Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Pengaruh Fogging. *Square: Journal of Mathematics and Mathematics Education*. 2(1), 1-16, http://dx.doi.org/10.21580/square.2020.2.1.5149