Edumatsains, 7 (2) Januari 2023, 374-382

EduMatSains

Jurnal Pendidikan, Matematika dan Sains

http://ejournal.uki.ac.id/index.php/edumatsains

KEAKURASIAN METODE *SHOOTING* UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH KONDISI BATAS PADA PERSAMAAN *STURM-LIOUVILLE*

Ummu Habibah*, Nielda Alifah Mulyanti

Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Brawijaya

Diterima: 19 November 2022 Direvisi: 17 Januari 2023 Diterbitkan: 31 Januari 2023

ABSTRACT

Pada penelitian ini dibahas keakurasian metode *shooting*/tembakan untuk menyelesaikan masalah kondisi batas Dirichlet pada persamaan *Sturm-Liouville* yang berbentuk persamaan diferensial orde dua, dengan kondisi batas Dirichlet. Persamaan *Sturm-Liouville* diselesaikan numerik menggunakan metode *shooting*. Simulasi numerik dilakukan dengan beberapa nilai h (ukuran langkah). Keakurasian metode *shooting* diperoleh dengan cara dibandingkan solusi numeriknya terhadap solusi eksak, serta dibandingkan dengan solusi numerik menggunakan metode beda hingga. Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode tembakan (*shooting*) menghasilkan solusi numerik yang lebih baik untuk mengaproksimasi masalah kondisi batas pada persamaan *Sturm-Liouville* dibandingkan metode beda hingga karena menghasilkan kesalahan numerik yang lebih kecil.

Keywords: Masalah kondisi batas, Metode *shooting*/tembakan, Metode beda hingga, Syarat batas Dirichlet.

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara turunan dari satu variabel atau beberapa fungsi tak diketahui yang disebut sebagai variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Suryanto, 2017). Salah satu persamaan diferensial yang biasa digunakan untuk memodelkan beberapa proses di alam adalah persamaan *Sturm-Liouville*. Untuk mengetahui beberapa proses alamiah, perlu menyelesaikan persamaan *Sturm-Liouville* dengan kondisi batas tertentu (Kreyszig, 2011). Masalah kondisi batas pada persamaan diferensial adakalanya sulit untuk diselesaikan secara analitik. Metode numerik adalah cara lain untuk mendapatkan penyelesaian hampiran dari suatu persamaan diferensial. Ada berbagai macam metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaian permalahan tersebut berdasarkan jenis permasalahannya. Untuk masalah nilai awal, metode Euler, metode Runge-Kutta ataupun metode prediktor korektor dapat digunakan untuk mendapatkan solusi numerik dari persamaan diferensial, sedangkan untuk masalah kondisi batas, metode beda hingga, metode tembakan (*shooting*) ataupun metode kolokasi dapat digunakan. Metode beda hingga lebih banyak dipakai dalam menyelesaikan masalah kondisi batas. Persamaan *Sturm-Liouville* diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga (Mukhatarov, 2019). Masalah pertubasi singular pada persamaan diferensial orde dua diselesaikan

***Correspondence Address**
E-mail: ummu_habibah@ub.ac.id

menggunakan beda hingga (Amodio & Settanni, 2012). Permasalahan kondisi batas diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga dan diselesaikan secara eksak menggunakan metode transformasi Laplace (Opanuga, Owoloko, Okagbue, & Agboola, 2017). Permasalahan pertubasi singular pada persamaan diferensial orde dua diselesaikan menggunakan metode Septic B-spline (Lodhi & Mishra, 2018). Metode beda hingga juga digunakan untuk untuk menyelesaikan masalah kondisi batas nonlinear dimana skema beda hingganya diaplikasikan untuk metode *shooting* (Filipov, Gospodinov, & Faragó, 2019). Masalah kondisi batas Robin pada persamaan diferensial Cauchy-Euler diselesaikan menggunakan metode beda hingga dan *shooting* (Habibah, Tuloli, Rimanada, & Ferreira, 2020)

Pada penelitian ini persamaan diferensial *Sturm-Liouville* akan diselesaikan secara numerik dengan memberikan masalah syarat batas (BVP) Dirichlet menggunakan metode tembakan (*shooting*). Penelitian ini merupakan pengembangan dari artikel Mukhtarov (2019) yang membahas tentang solusi numerik dari persamaan diferensial *Sturm-Liouville* menggunakan metode beda hingga. Solusi numerik yang diperoleh menggunakan metode *shooting* akan dibandingkan dengan solusi numerik dengan metode beda hingga. Keakurasian solusi numerik metode *shooting* akan dibandingkan dengan solusi eksaknya.

PERMASALAHAN

Masalah kondisi batas yang diselesaikan adalah persamaan diferensial orde-2 yang diambil dari artikel (Mukhatarov, 2019). Artikel tersebut membahas tentang solusi numerik dari persamaan diferensial *Sturm-Liouville* menggunakan metode beda hingga sebagai berikut

$$y'' + y' + ye^{-2x} = 0, \qquad (1)$$

dengan kondisi batas $y(-1) = 0$ dan $y(1) = 1$. Solusi eksak persamaan di atas adalah

$$y(x) = -\csc\left(\frac{1}{e} - e\right)\sin(e - e^{-x}). \qquad (2)$$

METODE BEDA HINGGA DAN METODE SHOOTING/TEMBAKAN

Metode beda hingga

Perhatikan bentuk umum persamaan diferensial biasa orde dua berikut

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), a \le t \le b$$

Beberapa kondisi batas dalam persamaan diferensial biasa orde dua adalah:

(i) Kondisi batas Dirichlet,

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

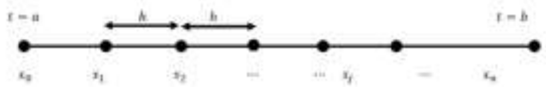
(ii) Kondisi batas Neumann

$$y'(a) = y'_a, y'(b) = y'_b.$$

(iii) Kondisi batas campuran / Robin,

$$\alpha y(a) + \beta = c.$$

Untuk menyelesaikan masalah kondisi batas, mula-mula kita membagi interval $a \leq t \leq b$ menjadi subinterval-subinterval seperti tampak pada gambar berikut.



$x_j = x_0 + jh$, $j = 0,1,2, \dots, n$ dengan $h = x_{j+1} - x_j$, n adalah banyaknya subinterval ditentukan dengan rumus $n = \frac{b-a}{h}$, dengan a adalah batas bawah, b ada batas atas, N adalah jumlah subinterval, dan h adalah ukuran langkah.

Pendekatan turunan pertama dan kedua.

(i) Beda maju

$$y'_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h},$$

$$y''_j = \frac{y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j}{h^2}.$$

(ii) Beda mundur

$$y'_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{h},$$

$$y''_j = \frac{y_j - 2y_{j-1} + y_{j-2}}{h^2}.$$

(iii) Beda pusat

$$y'_j = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h},$$

$$y''_j = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2}.$$

Metode *Shooting*

Bentuk umum masalah kondisi batas persamaan diferensial biasa orde dua adalah

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, \frac{dy}{dt}), a \leq t \leq b$$

dengan kondisi batas Dirichlet $y(a) = y_a$ dan $y(b) = y_b$.

Penyelesaian masalah kondisi batas tersebut menggunakan metode *shooting*, terlebih dahulu masalah kondisi batas diubah menjadi masalah nilai awal. Untuk itu dimisalkan

$$y_1 = y, y_2 = y'_1 = y',$$

sehingga

$$y" = (y')' = y'_2,$$

dan diperoleh sistem persamaan diferensial

$$y'_1 = y_2,$$

$$y'_2 = f(t, y_1, y_2).$$

Syarat awal bagi persamaan $y'_1 = y_2$ diperoleh dari kondisi batas, yaitu $y(a) = y_1(a) = y_a$, sedangkan syarat awal bagi persamaan kedua, yaitu $y'_2 = f(t, y_1, y_2)$ tidak diketahui dari masalah kondisi batas, sehingga kita harus menebak syarat awal bagi $y'_2 = f(t, y_1, y_2)$, misalkan $y_1(a) = s$

Jadi diperoleh sistem persamaan diferensial orde satu, yaitu:

$$y'_1 = y_2, \text{ dengan } y_1(a) = y_a,$$

$$y'_2 = f(t, y_1, y_2), \text{ dengan } y_2(a) = s.$$

Kemudian masalah nilai awal tersebut diselesaikan dengan menggunakan salah satu metode yang dipelajari, diantaranya adalah metode Euler, metode Runge-Kutta, dan metode Adam Basforth Moulton (Mathews & Fink, 1999).

Dengan menebak syarat awal $y'_2 = f(t, y_1, y_2)$ dengan $y_2(a) = s$, solusi numerik yang dihasilkan belum tentu tepat pada titik batas akhir, yaitu t=b. Oleh karena itu, pada metode *shooting* ini tujuan kita adalah menentukan s yang tepat sedemikian sehingga solusi numerik pada titik t=b, yaitu $y_2(b;s)$ harus sama dengan masalah kondisi batas di titik $t=b$, yaitu $y(b)=y_b$. Kemudian, nilai s dicari sehingga $y_1(b;s)=y_b$, atau dapat ditulis $y_1(b;s)-y_b=0$.

Jika dimisalkan $g(s)=y_1(b;s)-y_b$, maka diperoleh $g(s)=0$. Dengan kata lain, nilai s dicari sedemikian sehingga $g(s)=0$. Pencarian akar persamaan nonlinear dapat dihitung secara numerik menggunakan metode bagi dua, metode posisi palsu, metode Newton Raphson, metode Secant, dan metode iterasi titik tetap. Dengan menggunakan salah satu metode-metode pencarian akar tersebut, diperoleh s yang tepat, sehingga diperoleh pula solusi numerik yang sesuai dengan masalah kondisi batasnya.

SKEMA NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL *STURM LIOUVILLE*

Pada artikel ini, metode numerik yang akan diimplementasikan pada permasalahan kondisi batas Persamaan (1) adalah metode beda hingga dan *shooting*/tembakan. Berikut adalah skema numerik metode yang diimplementasikan pada Persamaan (1).

Implementasi Metode Beda Hingga

Persamaan (1) dapat kita ubah menjadi

$$y'' + y' + ye^{-2x_i} = 0, \tag{3}$$

dengan kondisi batas $y(-1)=0$ dan $y(1)=1$, i=0, 1, 2, ⋯, N. Dengan menggunakan pendekatan beda pusat untuk turunan pertama maupun turunan kedua, diperoleh

$$\left(\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}\right)+\left(\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right)+ y_i e^{-2x_i}=0, \tag{4}$$

kemudian persamaan (4) disederhanakan dengan dikalikan dengan $2h^2$

$$2(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})+h(y_{i+1}-y_{i-1})+2h^2\, y_i e^{-2x_i}=0, \tag{5}$$

dengan mengumpulkan suku yang bersesuaian, diperoleh

$$(2-h)y_{i-1}+(-4+2h^2e^{-2x_i})y_i+(2+h)y_{i+1}=0. \tag{6}$$

Persamaan (6) dapat ditulis menjadi sistem persamaan linear $\boldsymbol{PU}$=$\boldsymbol{Q}$, dengan **P** adalah matriks tridiagonal berukuran (N−1)×(N−1)

P=

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{N-3} & c_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-3} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix}, \text{ dan } \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -2-h \end{bmatrix},$$

dengan

$a_i=2-h$,

$b_i=-4+2h^2e^{-2x_i}$,

$c_i=2+h$.

Implementasi Metode *Shooting*

Masalah kondisi batas pada Persamaan (1) diselesaikan menggunakan metode shooting/tembakan yaitu dengan cara menyatakan persamaaan dferensial ke dalam masalah nilai awal. Persamaan (1) di tulis kembali, yaitu

$$y'' + y' + ye^{-2x} = 0, \qquad (7)$$

dengan kondisi batas $y(-1) = 0$ dan $y(1) = 1$.

Dimisalkan $u_1 = y$ dan $u_2 = y'$, sehingga persamaan (7) dapat ditulis sebagai sistem persamaan diferensial orde satu berikut

$$u_1' = y' = u_2,$$
$$u_2' = y" = -u_2 - u_1e^{-2x},$$

syarat batas pada Persamaan (7) berubah menjadi $u_1(-1) = 0$ dan $u_1(1) = 1$. Jika diberikan tebakan awal $u_2(-1) = s$ maka diperoleh masalah nilai awal sebagai berikut:

$$\boldsymbol{z}' = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -u_2 - u_1e^{-2x} \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

dengan nilai awal

$$\boldsymbol{z}(0) = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}.$$

Masalah nilai awal Persamaan (8) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Solusi $\boldsymbol{z}(u_i)$ untuk semua i dapat ditemukan termasuk $z(u_i)$ pada batas, yaitu $u_2(-1) = s$. Jika $z(1) = s$ maka masalah kondisi batas sudah terselesaikan. Tetapi, secara umum tebakan nilai s memberikan solusi $z(1) \neq s$, sehingga perlu dipilih nilai s yang lain, dan masalah nilai awal dengan tebakan baru perlu diselesaikan kembali. Proses tersebut perlu diulang-ulang hingga memeroleh $z(1) = s$.

SIMULASI NUMERIK

Bagian ini membahas mengenai analisis hasil penyelesaian secara numerik dengan metode beda hingga dan metode *shooting*, dengan jumlah subinterval $N = 10$, $N = 50$ dan $N = 100$ pada interval $[-1,1]$. Hasil yang diperoleh akan dibandingkan dengan solusi eksak, kemudian dihitung error pada masing-masing metode.

Solusi numerik menggunakan metode beda hingga

Solusi numerik saat N $= \mathbf{10}$ ($\boldsymbol{h} = \mathbf{0.2}$)

Berikut disajikan tabel dan *plot* solusi numerik dari metode beda hingga ketika ukuran tiap langkah $h = 0.2$.

Tabel 1. Solusi numerik dengan metode beda hingga ($h = 0.2$)

i	x_i	y_{num}	y_{eksak}	$Error$
2	-0.60	1.130	1.098	0.032
3	-0.40	1.353	1.324	0.030
4	-0.20	1.427	1.402	0.025
5	0.00	1.410	1.391	0.019
6	0.20	1.344	1.331	0.013
7	0.40	1.258	1.249	0.009
…				

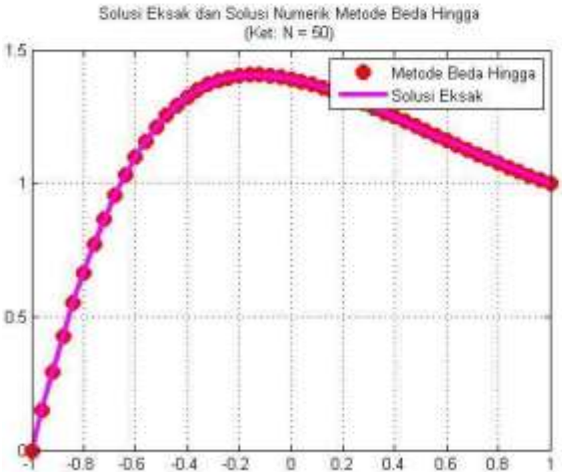
Gambar 1. Solusi numerik dengan metode beda hingga ($h = 0.2$)

Solusi numerik saat $N = 50$ ($h = 0.04$)

Berikut disajikan tabel dan *plot* solusi numerik dari metode beda hingga ketika ukuran tiap langkah $h = 0.04$.

Tabel 2. Solusi numerik dengan metode beda hingga ($h = 0.04$)

i	x_i	y_{num}	y_{eksak}	*Error*
22	-0.12	1.407	1.406	0.001
23	-0.08	1.404	1.403	0.001
24	-0.04	1.399	1.398	0.001
25	0.00	1.392	1.391	0.001
26	0.04	1.382	1.382	0.001
27	0.08	1.372	1.371	0.001
…				



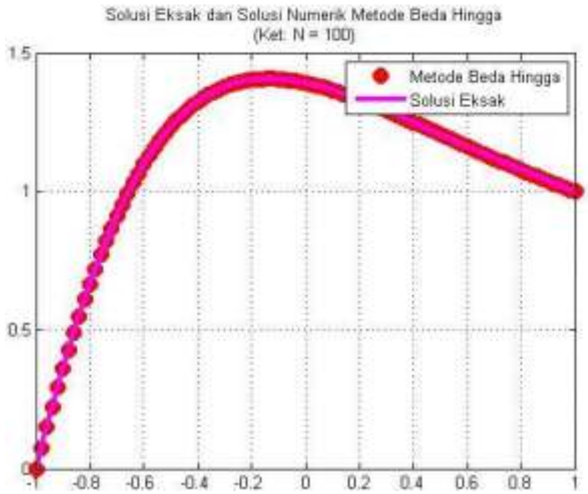
Gambar 2. Solusi numerik dengan metode beda hingga ($h = 0.04$)

Solusi numerik saat $N = 100$ (0.02)

Berikut disajikan tabel dan *plot* solusi numerik dari metode beda hingga ketika ukuran tiap langkah $h = 0.02$.

Tabel 3. Solusi numerik dengan metode beda hingga ($h = 0.02$)

i	x_i	y_{num}	y_{eksak}	*Error*
47	-0.06	1.401	1.401	0.000
48	-0.04	1.398	1.398	0.000
49	-0.02	1.395	1.395	0.000
50	0.00	1.391	1.391	0.000
51	0.02	1.387	1.386	0.001
51	0.04	1.382	1.382	0.000
…				



Gambar 3. Solusi numerik dengan metode beda hingga ($h = 0.02$)

Berdasarkan Tabel 1 – 3 dan Gambar 1-3 terlihat bahwa semakian banyak jumlah subinterval N akan menghasilkan ukuran langkah h yang lebih kecil dan *error* yang kecil juga. Hal ini mengindikasikan bahwa keakurasian metode beda hingga cukup baik.

Solusi numerik dengan metode *shooting*

Solusi numerik saat $N = 10$ ($h = 0.2$)

Berikut disajikan tabel dan *plot* solusi numerik dari metode shooting ketika ukuran tiap langkah $h = 0.2$.

Tabel 4. Solusi numerik dengan metode *shooting* ($h = 0.2$)

i	x_i	y_{num}	y_{eksak}	*Error*
2	-0.6	1.098	1.098	0.000
3	-0.4	1.323	1.324	0.001
4	-0.2	1.402	1.402	0.000
5	0.0	1.391	1.391	0.000
6	0.2	1.331	1.331	0.000
7	0.4	1.249	1.249	0.000
…				

Gambar 4. Solusi numerik dengan metode *shooting* ($h = 0.2$)

Solusi numerik saat $N = 50$ ($h = 0.04$)

Berikut disajikan tabel dan *plot* solusi numerik dari metode shooting ketika ukuran tiap langkah $h = 0.04$.

Tabel 5. Solusi numerik dengan metode *shooting* ($h = 0.04$)

i	x_i	y_{num}	y_{eksak}	*Error*
22	-0.12	1.406	1.406	0.000
23	-0.08	1.403	1.403	0.000
24	-0.04	1.398	1.398	0.000
25	0.00	1.391	1.391	0.000
26	0.04	1.382	1.382	0.000
27	0.08	1.371	1.371	0.000
…				

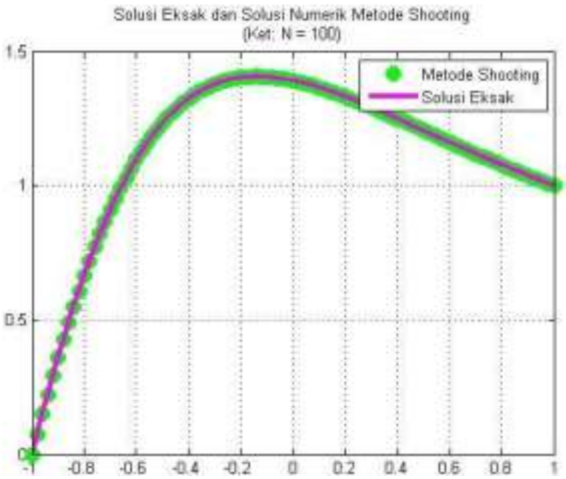
Gambar 5. Solusi numerik dengan metode *shooting* ($h = 0.04$)

***Solusi numerik saat N*=100 ($h = 0.02$)**

Berikut disajikan tabel dan *plot* solusi numerik dari metode *shooting* saat *N*=100.

Tabel 6. Solusi numerik dengan metode *shooting* ($h = 0.04$)

i	xi	y_num	y_eksak	$error$
47	-0.06	1.401	1.401	0.000
48	-0.04	1.398	1.398	0.000
49	-0.02	1.395	1.395	0.000
50	0.00	1.391	1.391	0.000
51	0.02	1.386	1.386	0.000
52	0.04	1.382	1.382	0.000
…				



Gambar 6. Solusi numerik dengan metode *shooting* ($h = 0.02$)

Tabel 4–6 menyajikan 5 iterasi (i) terakhir dari solusi numerik dari persamaan (1) menggunakan metode *shooting* dengan N yang berbeda-beda. Gambar 4–6 merupakan kurva solusi numerik dari persamaan (1) dengan nilai N yang berbeda. Dapat dilihat bahwa nilai N berbanding terbalik dengan *error*, yaitu semakin banyak iterasi atau N yang dipilih maka semakin kecil juga *error*nya sehingga solusi yang dihasilkan lebih baik.

KESIMPULAN

Hasil simulasi numerik masalah kondisi batas pada persamaan *Sturm-Louville* diperoleh kesimpulan sebagai berikut. Pertama, jumlah subinterval (N) yang diambil berbanding terbalik dengan *error*, artinya semakin besar nilai N maka semakin kecil juga *error*nya. Hal ini menunjukkan solusi yang diperoleh semakin baik.

Kedua, metode *shooting* merupakan metode terbaik karena memilik *error* yang lebih kecil dibandingkan metode beda hingga. Metode *shooting* memiliki keakurasian sampai tiga desimal dengan ukuran langkah $h = 0.02$.

DAFTAR PUSTAKA

Amodio, P., & Settanni, G. (2012). A finite differences MATLAB code for the numerical solution of second order singular perturbation problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *236*(16), 3869-3879. https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.04.011

Filipov, S. M., Gospodinov, I. D., & Faragó, I. (2019). Replacing the finite difference methods for nonlinear two-point boundary value problems by successive application of the linear shooting method. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 358*, 46-60. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.03.004

Habibah, U., Tuloli, M. H., Rimanada, V., & Ferreira, T. G. (2020). Penyelesaian Numerik Masalah Syarat Batas Robin pada Persamaan Diferensial Cauchy-Euler. *MAJAMATH: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, *3*(1), 32-40. https://doi.org/10.36815/majamath.v3i1.615

Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd.

Lodhi, R. K., & Mishra, H. K. (2018). Septic B-spline method for second order self-adjoint singularly perturbed boundary-value problems. *Ain Shams Engineering Journal*, *9*(4), 2153-2161. https://doi.org/10.1016/j.asej.2016.09.016

Mathews, J. H., & Fink, K. D. (1999). *Numerical methods using Matlab*. Fullerton.

Mukhtarov, O., Çavuşoğlu, S., & Olğar, H. (2019). Numerical solution of one boundary value problem using finite difference method. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, *11*, 85-89.

Opanuga, A. A., Owoloko, E. A., Okagbue, H. I., & Agboola, O. O. (2017). Finite Difference Method and Laplace Transform for Boundary Value Problems. In *Proceedings of the World Congress on Engineering* (Vol. 1), pp. 65-69.

Suryanto, A. (2017). *Metode numerik untuk persamaan diferensial biasa dan aplikasinya dengan MATLAB*. UM Press.