Edumatsains, 7 (2) Januari 2023, 363-373
EduMatSains
Jurnal Pendidikan, Matematika dan Sains
http://ejournal.uki.ac.id/index.php/edumatsains

TEOREMA TITIK TETAP UNTUK PEMETAAN KANNAN DAN CHATTERJEA PADA RUANG METRIK MODULAR BERNILAI KOMPLEKS

Mariatul Kiftiah*, Yudhi

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Tanjungpura

Diterima: 1 Oktober 2022 Direvisi: 25 Januari 2023 Diterbitkan: 31 Januari 2023

ABSTRACT

In this paper, inspired by fixed point concepts of complex valued modular metric space, we introduce Kannan $\boldsymbol{\omega}$ −complex and Chatterjea $\boldsymbol{\omega}$ −complex mappings. Using this new idea, some fixed point theorems involving both of these contractive mappings are established. Furthermore, existence and uniqueness of fixed point for Kannan $\boldsymbol{\omega}$ −complex and Chatterjea $\boldsymbol{\omega}$ −complex mappings on complex valued modular metric space is proved.

Keywords: Kannan $\boldsymbol{\omega}$ −complex, Chatterjea $\boldsymbol{\omega}$ −complex, fixed point.

PENDAHULUAN

Ruang metrik merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan fungsi jarak metrik. Penelitian terkait ruang metrik menarik para peneliti untuk selalu melakukan pengkajian lebih dalam, diantaranya adalah perluasan pada definisi metrik yang digunakan. Ruang metrik modular yang merupakan perluasan ruang metrik, ruang metrik linear, dan ruang modular linear pertama kali diperkenalkan oleh Chistyakov (2006). Dalam penelitian selanjutnya, Chistyakov (2011) juga membangun teorema titik tetap untuk pemetaan kontraktif dan pemetaan Kannan yang didefinisikan di ruang metrik modular dan Zhao dkk. (2018) yang berhasil mendefinisikan dan menyelidiki titik tetap untuk pemetaan kontraksi Chatterjea yang diperlemah pada ruang tersebut. Pengenalan gagasan ruang metrik modular ini diikuti oleh banyak peneliti lain di antaranya adalah Mongkolkeha, Sintunavarat, dan Kumam (2011), Sitthikul dan Saejung (2012), Abdou dan Khamsi (2013), Ege dan Alaca (2015), dan Aksoy, Karapınar, dan Erhan (2017).

Pengembangan terhadap ruang metrik modular lainnya dilakukan oleh Özkan, Gürdal, dan Mutlu (2021) yang memperkenalkan struktur ruang baru dan disebut dengan ruang metrik modular bernilai kompleks. Konsep ini muncul terinspirasi dari penelitian yang dilakukan oleh Azam, Fisher, dan Khan (2011) dimana didefinisikan perumuman dari ruang metrik klasik yaitu ruang metrik bernilai kompleks. Dalam penelitian yang dilakukan oleh Özkan dkk. (2021), diselidiki pula titik tetap untuk pemetaan kontraktif yang memenuhi ketaksamaan rasionalitas pada ruang metrik

***Correspondence Address**
E-mail: kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

bernilai kompleks. Lebih lanjut diperoleh titik tetap tersebut bersifat tunggal.

Oleh karena konsep titik tetap dari pemetaan Kannan dan Chatterjea pada ruang metrik modular bernilai kompleks belum dilakukan penelitian lebih mendalam, maka pada penelitian ini akan dikonstruksi kedua pemetaan tersebut di ruang metrik modular bernilai kompleks dan selanjutnya diselidiki eksistensi dan ketunggalan titik tetapnya.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur. Langkah pertama yang dilakukan adalah dikaji konsep urutan parsial pada bilangan kompleks, konsep ruang metrik modular benilai kompleks, dan pemetaan kontraktif kompleks- ω. Berdasarkan konsep-konsep tersebut dibangun konsep pemetaan Kannan kompleks- ω dan pemetaan Chatterjea kompleks- ω di ruang metrik modular kompleks sebagaimana sudah didefinisikan di ruang metrik modular. Selanjutnya, diselidiki syarat cukup yang harus dipenuhi oleh kedua pemetaan kontraktif-ω tersebut untuk menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetapnya. Dari syarat cukup yang diperoleh, kemudian diformulasikan teorema titik tetap untuk generalisasi kedua pemetaan kontraktif kompleks-ω tersebut di ruang metrik modular bernilai kompleks. Setelah itu dikaji akibat-akibat yang muncul dari masing-masing teorema titik tetap.

Sebelum membahas lebih jauh tentang titik tetap di ruang metrik modular bernilai kompleks, terlebih dahulu pada bagian ini diberikan konsep urutan parsial pada bilangan kompleks, konsep ruang metrik modular benilai kompleks, dan pemetaan kontraktif kompleks- ω.

Urutan Parsial pada Bilangan Kompleks

Definisi 1: *Diberikan $\mathbb{C}$ himpunan semua bilangan kompleks dan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Didefinisikan urutan parsial $\precsim$ pada $\mathbb{C}$ yang memenuhi $z_1 \precsim z_2$ jika dan hanya jika* $\mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2)$ *dan* $\mathrm{Im}(z_1) \leq \mathrm{Im}(z_2)$.

Akibatnya, jika $z_1 \precsim z_2$ maka salah satu dari kondisi berikut terpenuhi:

(i) $\mathrm{Re}\,(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ dan $\mathrm{Im}(z_1) < \mathrm{Im}(z_2)$

(ii) $\mathrm{Re}(z_1) < \mathrm{Re}(z_2)$ dan $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$

(iii) $\mathrm{Re}(z_1) < \mathrm{Re}(z_2)$ dan $\mathrm{Im}(z_1) < \mathrm{Im}(z_2)$

(iv) $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ dan $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$

Jika $z_1 \neq z_2$ dan salah satu dari (i), (ii), atau (iii) terpenuhi maka dapat dituliskan $z_1 \precnsim z_2$. Secara khusus, jika hanya kondisi (iii) yang terpenuhi maka dapat dituliskan $z_1 \prec z_2$.

Untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, urutan parsial pada $\mathbb{C}$ mempunyai sifat sebagai berikut:

(i) $0 \precsim z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow |z_1| < |z_2|$,

(ii) $z_2 \precsim z_2$ dan $z_2 \prec z_3 \Rightarrow z_1 \prec z_3$,

(iii) $z \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow az \precsim bz$

Ruang Metrik Modular Bernilai Kompleks

Diberikan $X \neq \emptyset$, $\lambda > 0$ dan fungsi $\omega: (0, \infty) \times X \times X \to \mathbb{C}$. Dalam penelitian ini, untuk setiap $\lambda > 0$ dan $x, y \in X$, maka fungsi $\omega(\lambda, x, y)$ dinotasikan dengan $\omega_\lambda(x, y)$.

Definisi 2 (Özkan dkk., 2021): *Diberikan* $X \neq \emptyset$. *Fungsi* $\omega: (0, \infty) \times X \times X \to \mathbb{C}$ *disebut metrik modular bernilai kompleks pada* X, *jika untuk setiap* $\lambda, \mu > 0$ *dan* $x, y, z \in X$ *berlaku*

(M1) $\omega_\lambda(x, y) \succcurlyeq 0\ dan\ \omega_\lambda(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M2) $\omega_\lambda(x, y) = \omega_\lambda(y, x)$.

(M3) $\omega_{\lambda+\mu}(x, y) \preccurlyeq \omega_\lambda(x, z) + \omega_\mu(z, y)$.

Definisi 3 (Özkan dkk., 2021): *Diberikan* $X \neq \emptyset$ *dan* $\omega: (0, \infty) \times X \times X \to \mathbb{C}$ *metrik modular bernilai kompleks pada* X. *Untuk setiap* $x_0 \in X$, *himpunan*

$$X_\omega = \left\{ x \in X \middle| \lim_{\lambda \to \infty} \omega_\lambda(x, x_0) = 0 \right\}$$

disebut dengan ruang metrik modular bernilai kompleks disekitar titik x_0.

Definisi 4 (Özkan dkk., 2021): *Diberikan* X_ω *ruang metrik modular bernilai kompleks dan* $\{x_n\}$ *barisan di* X_ω.

(i) *Barisan* $\{x_n\} \subseteq X_\omega$ *dikatakan konvergen metrik modular kompleks (konvergen kompleks* $-\omega$*) ke* $x \in X_\omega$ *jika untuk setiap* $\varepsilon \in \mathbb{C}$ *dengan* $\varepsilon \succ 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sehingga untuk setiap* $n \geq n_0\ dan\ \lambda > 0\ berlaku$ $\omega_\lambda(x_n, x) \prec \varepsilon$. *Ditulis* $\lim_{n \to \infty} \omega_\lambda(x_n, x) = 0$.

(ii) *Barisan* $\{x_n\} \subseteq X_\omega$ *disebut barisan Cauchy metrik modular kompleks (barisan Cauchy kompleks* $-\omega$*), jika untuk setiap* $\varepsilon \in \mathbb{C}$ *dengan* $\varepsilon \succ 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sehingga untuk setiap* $m, n \geq n_0\ dan\ \lambda > 0\ berlaku$ $\omega_\lambda(x_n, x_m) \prec \varepsilon$. *Ditulis* $\lim_{m,n \to \infty} \omega_\lambda(x_n, x_m) = 0$.

(iii) *Ruang metrik modular kompleks* X_ω *dikatakan lengkap kompleks-* ω *jika setiap barisan Cauchy kompleks-*ω *di dalam ruang modular* X_ω *bersifat konvergen kompleks-* ω. *Selanjutnya, ruang metrik modular kompleks* X_ω *yang lengkap kompleks-* ω *disebut ruang lengkap kompleks-*ω.

(iv) *Himpunan* $B \subseteq X_\omega$ *disebut tertutup metrik modular kompleks (tertutup kompleks-*ω*), jika setiap barisan* $\{x_n\} \subseteq X_\omega$ *yang konvergen kompleks-*ω *ke* $x \in X_\omega$, *berakibat* $x \in B$.

(v) *Himpunan* $B \subseteq X_\omega$ *disebut terbatas metrik modular kompleks (terbatas kompleks-*ω*), jika*

$$\delta_\omega(B) = \sup\{|\omega_\lambda(x, y)|; x, y \in B\} < \infty$$

dengan $\delta_\omega(B)$ *disebut diameter kompleks-*ω *dari* B.

Untuk memudahkan gambaran mengenai ruang metrik modular kompleks berikut diberikan contoh.

Contoh 1: Diberikan $X = \mathbb{C}$, dan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dengan $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2$. Didefinisikan fungsi $\omega: (0,\infty) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dengan

$$\omega_\lambda(z_1, z_2) = \frac{|a_1 - a_2| + i|b_1 - b_2|}{\lambda},$$

untuk setiap $\lambda > 0$. Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa fungsi ω memenuhi ketiga aksioma metrik modular bernilai kompleks. Sehingga untuk setiap $x_0 \in \mathbb{C}$, himpunan

$$\mathbb{C}_\omega = \left\{x \in \mathbb{C} \middle| \lim_{\lambda \to \infty} \omega_\lambda(x, x_0) = 0\right\}$$

merupakan ruang metrik modular bernilai kompleks disekitar titik x_0. Lebih lanjut, dapat ditunjukkan pula $\mathbb{C}_\omega$ merupakan ruang metrik modular bernilai kompleks lengkap atau $\mathbb{C}_\omega$ lengkap kompleks-ω.

Lema 1: *Diberikan X_ω ruang metrik modular bernilai kompleks dan $\{x_n\}$ barisan di X_ω. Barisan $\{x_n\}$ konvergen kompleks−ω ke $x \in X_\omega$ jika dan hanya jika* $\lim_{n\to\infty} |\omega_\lambda(x_n, x)| = 0$.

Bukti.

(⇒)

Diambil sebarang $\varepsilon_\mathbb{R} \in \mathbb{R}$ dengan $\varepsilon_\mathbb{R} > 0$. Dipilih

$$\varepsilon_\mathbb{C} = \frac{\varepsilon_\mathbb{R}}{\sqrt{2}} + i\frac{\varepsilon_\mathbb{R}}{\sqrt{2}}$$

Maka $\varepsilon_\mathbb{C} \in \mathbb{C}$ dan $\varepsilon_\mathbb{C} \succ 0$.

Karena $\{x_n\}$ barisan konvergen kompleks −ω maka menurut Definisi 4(ii) ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku $\omega_\lambda(x_n, x) \prec \varepsilon_\mathbb{C}$, untuk setiap $\lambda > 0$.

Selanjutnya dengan menggunakan sifat terurut parsial bilangan kompleks diperoleh $|\omega_\lambda(x_n, x)| \prec |\varepsilon_\mathbb{C}| = \varepsilon_\mathbb{R}$.

Hal ini berakibat, $\lim_{n\to\infty} |\omega_\lambda(x_n, x)| = 0$.

(⇐)

Diambil sebarang $\varepsilon_\mathbb{C} \in \mathbb{C}$ dengan $\varepsilon_\mathbb{C} \succ 0$.

Jika $|\varepsilon_\mathbb{C}| = \varepsilon_\mathbb{R}$ maka $\varepsilon_\mathbb{R} > 0$.

Karena $\lim_{n\to\infty} |\omega_\lambda(x_n, x)| = 0$ maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku $|\omega_\lambda(x_n, x)| < \varepsilon_\mathbb{R} = |\varepsilon_\mathbb{C}|$, untuk setiap $\lambda > 0$.

Dengan menggunakan sifat terurut parsial bilangan kompleks diperoleh $\omega_\lambda(x_n, x) \prec \varepsilon_\mathbb{C}$.

Dengan kata lain, $\{x_n\}$ barisan konvergen kompleks−ω.

Lema 2: *Diberikan X_ω ruang metrik modular bernilai kompleks dan $\{x_n\}$ barisan di X_ω. Barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy kompleks−ω di X_ω jika dan hanya jika* $\lim_{m,n\to\infty} |\omega_\lambda(x_n, x_m)| = 0$.

Bukti.

(⇒)

Diambil sebarang $\varepsilon_\mathbb{R} \in \mathbb{R}$ dengan $\varepsilon_\mathbb{R} > 0$. Dipilih

$$\varepsilon_\mathbb{C} = \frac{\varepsilon_\mathbb{R}}{\sqrt{2}} + i\frac{\varepsilon_\mathbb{R}}{\sqrt{2}}$$

Maka $\varepsilon_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$ dan $\varepsilon_{\mathbb{C}} \succ 0$.

Karena $\{x_n\}$ barisan Cauchy kompleks$-\omega$ maka menurut Definisi ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\omega_\lambda(x_n, x_m) \prec \varepsilon_{\mathbb{C}}$, untuk setiap $\lambda > 0$.

Selanjutnya diperoleh, $|\omega_\lambda(x_n, x_m)| < |\varepsilon_{\mathbb{C}}| = \varepsilon_{\mathbb{R}}$.

Hal ini berakibat, $\lim_{n\to\infty} |\omega_\lambda(x_n, x_{n+m})| = 0$.

(⇐)

Diambil sebarang $\varepsilon_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$ dengan $\varepsilon_{\mathbb{C}} \succ 0$.

Jika $|\varepsilon_{\mathbb{C}}| = \varepsilon_{\mathbb{R}}$ maka $\varepsilon_{\mathbb{R}} > 0$.

Karena $\lim_{n\to\infty} |\omega_\lambda(x_n, x_{n+m})| = 0$ maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $|\omega_\lambda(x_n, x_m)| < \varepsilon_{\mathbb{R}} = |\varepsilon_{\mathbb{C}}|$, untuk setiap $\lambda > 0$.

Dengan menggunakan sifat terurut parsial diperoleh $\omega_\lambda(x_n, x_m) \prec \varepsilon_{\mathbb{C}}$.

Dengan kata lain, $\{x_n\}$ barisan Cauchy kompleks$-\omega$.

Lema 3 (Özkan dkk., 2021): *Diberikan $\omega, z \in \mathbb{C}$. Jika $\omega \succcurlyeq 0, |z| < 1$ dan $\omega \preccurlyeq z\omega$ maka $\omega = 0 \in \mathbb{C}$.*

Pemetaan Kontraktif Kompleks- *ω*

Definisi 4 (Özkan dkk., 2021): *Diberikan X_ω ruang metrik modular bernilai kompleks. Pemetaan $T: X_\omega \to X_\omega$ disebut pemetaan kontraktif kompleks- ω jika terdapat $z \in \mathbb{C}$ dengan $|z| < 1$ sehingga berlaku*

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \preccurlyeq z\omega_\lambda(x, y),$$

untuk setiap $\lambda > 0$ dan $x, y \in X_\omega$.

Teorema 1 (Özkan dkk., 2021): *Diberikan X_ω ruang metrik modular lengkap bernilai kompleks. Jika $T: X_\omega \to X_\omega$ pemetaan kontraktif kompleks- ω pada X_ω , maka T mempunyai titik tetap tunggal.*

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini dibangun konsep pemetaan Kannan kompleks- ω dan pemetaan Chatterjea kompleks- ω yang didefinisikan pada ruang metrik modular bernilai kompleks. Eksistensi dan ketunggalan titik tetap untuk masing-masing pemetaan kontraktif tersebut akan disajikan pada Teorema setelah pemetaan tersebut didefinisikan.

Pemetaan Kannan Kompleks-ω

Definisi 5: *Diberikan X_ω ruang metrik modular bernilai kompleks dan pemetaan $T: X_\omega \to X_\omega$. Pemetaan T disebut pemetaan Kannan kompleks-ω jika untuk setiap $\lambda > 0$ dan $x, y \in X_\omega$ berlaku*

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \preccurlyeq z\big(\omega_{2\lambda}(Tx, x) + \omega_{2\lambda}(Ty, y)\big),$$

untuk suatu $z \in \mathbb{C}$ dengan $|z| < \frac{1}{2}$.

Teorema 2: *Diberikan X_ω ruang metrik modular lengkap bernilai kompleks dan pemetaan $T: X_\omega \to X_\omega$. Jika T memenuhi pemetaan Kannan kompleks- ω maka T memiliki titik tetap tunggal.*

Bukti.

Diambil sebarang $x_0 \in X_\omega$. Untuk setiap $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ didefinisikan

$$T^0 x_0 = x_0\ ;\ T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0)$$

Selanjutnya, didefinisikan barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dengan

$$x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$$

Karena T pemetaan Kannan kompleks- ω maka

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) &= \omega_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n)\\ &\precsim z[\omega_{2\lambda}(Tx_{n-1}, x_{n-1})\\ &+ \omega_{2\lambda}(Tx_n, x_n)]\\ &= z[\omega_{2\lambda}(x_n, x_{n-1})\\ &+ \omega_{2\lambda}(x_{n+1}, x_n)]\\ &\precsim z[\omega_\lambda(x_n, x_n)\\ &+ \omega_\lambda(x_n, x_{n-1})\\ &+ \omega_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1})\\ &+ \omega_\lambda(x_{n+1}, x_n)]\end{aligned}$$

Dari ketaksamaan di atas diperoleh

$$(1 - z)\omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) \precsim z\omega_\lambda(x_{n-1}, x_n)$$
$$\Leftrightarrow\ \omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) \precsim \frac{z}{1 - z}\omega_\lambda(x_{n-1}, x_n)$$

Selanjutnya, secara induktif untuk setiap $n \in \{0,1,2, \dots\dots\}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) &\precsim \frac{z}{1 - z}\omega_\lambda(x_{n-1}, x_n)\\ &\precsim \left[\frac{z}{1 - z}\right]^2 \omega_\lambda(x_{n-2}, x_{n-1})\\ &\precsim \cdots\\ &\precsim \left[\frac{z}{1 - z}\right]^n \omega_\lambda(x_0, x_1)\\ &= \left[\frac{z}{1 - z}\right]^n \omega_\lambda(x_0, Tx_0).\end{aligned}$$

Jadi, $\omega_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n) \preccurlyeq \left[\frac{z}{1-z}\right]^n \omega_\lambda(x_0, Tx_0)$.

Ada dua kasus:

Kasus 1: Jika terdapat $n \in \{0,1,2, \dots\dots\}$ sehingga $x_n = x_0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(x_0, Tx_0) &= \omega_\lambda(x_n, Tx_n)\\ &= \omega_\lambda(x_n, x_{n+1})\\ &\precsim \left(\frac{z}{1 - z}\right)^n \omega_\lambda(x_0, Tx_0)\end{aligned}$$

Karena $|z| < \frac{1}{2}$ maka $0 < \left|\frac{z}{1-z}\right| < 1$. Akibatnya, $0 \prec \frac{z}{1-z} \prec 1$. Berdasarkan Lema 3 diperoleh

$$\omega_\lambda(x_0, Tx_0) = 0$$

Hal ini berarti, $x_0 = Tx_0$. Jadi, x_0 merupakan titik tetap T.

Kasus 2: Untuk setiap $n \in \{0,1,2, \dots\dots\}$ berlaku $x_n \neq x_0$.

Diambil sebarang $m, n \in \{0,1,2, \dots.\}$. Asumsikan $m > n$, maka $m = n + s$, untuk suatu $s \in \mathbb{N}$. Lebih lanjut diperoleh

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(x_n, x_m) &= \omega_\lambda(x_n, x_{n+s})\\ &\preccurlyeq \omega_{\lambda/s}(x_n, x_{n+1})\\ &+ \omega_{\lambda/s}(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots\\ &+ \omega_{\lambda/s}(x_{n+s-1}, x_{n+s})\\ &\precsim \left(\frac{z}{1 - z}\right)^n \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)\\ &+ \left(\frac{z}{1 - z}\right)^{n+1} \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)\\ &+ \cdots\\ &+ \left(\frac{z}{1 - z}\right)^{n+s-1} \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)\\ &= \left[\left(\frac{z}{1 - z}\right)^n + \left(\frac{z}{1 - z}\right)^{n+1}\right.\\ &+ \cdots\\ &\left.+ \left(\frac{z}{1 - z}\right)^{n+s-1}\right] \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)\end{aligned}$$

$$= \left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^n \left[1 + \left(\frac{z}{1-z}\right) + \cdots + \left(\frac{z}{1-z}\right)^{s-1}\right]\right] \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)$$

$$\precsim \left\{\left(\frac{z}{1-z}\right)^n \left[1 + \left(\frac{z}{1-z}\right) + \cdots + \left(\frac{z}{1-z}\right)^{s-1} + \cdots\right]\right\} \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)$$

$$= \left[\frac{z^n}{((1-z)^{n-1})(1-2z)}\right] \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)$$

Dengan menggunakan sifat urutan parsial kompleks diperoleh

$$|\omega_\lambda(x_n, x_m)| \leq \left|\frac{z^n}{((1-z)^{n-1})(1-2z)}\right| \left|\omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)\right|$$

Karena $|z| < \frac{1}{2}$ maka $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^n}{((1-z)^{n-1})(1-2z)}\right| = 0$. Jadi diperoleh

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |\omega_\lambda(x_n, x_m)| \leq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^n}{((1-z)^{n-1})(1-2z)}\right| \left|\omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)\right| = 0$$

Jadi, $\lim_{n\to\infty} |\omega_\lambda(x_n, x_m)| = 0$. Dengan menggunakan Lema 2 diperoleh barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di X_ω. Karena X_ω ruang metrik modular lengkap bernilai kompleks, maka ada $u \in X_\omega$ sedemikian sehingga barisan $\{x_n\}$ konvergen ke u. Dengan kata lain, $\lim_{n\to\infty} \omega_\lambda(x_n, u) = 0$. Dengan menggunakan aksioma (M3) metrik modular kompleks dan karena T pemetaan Kannan kompleks-ω diperoleh

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(u, Tu) &\precsim \omega_{\lambda/2}(u, T^{n+1}u) + \omega_{\lambda/2}(T^{n+1}u, Tu) \\ &\precsim \omega_{\lambda/2}(u, T^{n+1}u) + z[\omega_\lambda(T^{n+1}u, u) + \omega_\lambda(Tu, u)] \\ &= \omega_{\lambda/2}(u, T^{n+1}u) + z\omega_\lambda(T^{n+1}u, u) + z\omega_\lambda(Tu, u)\end{aligned}$$

Karena $\{x_n\}$ konvergen ke u maka diperoleh

$$\omega_\lambda(u, Tu) \precsim z\omega_\lambda(u, Tu) \precsim 2z\omega_\lambda(u, Tu)$$

Karena $|z| < \frac{1}{2}$ maka $2|z| < 1$. Lebih lanjut, dengan menggunakan Lema 3 diperoleh

$$\omega_\lambda(u, Tu) = 0.$$

Dengan kata lain $Tu = u$. Jadi, u adalah titik tetap dari T.

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa titik tetap T tunggal. Asumsikan ada titik $v \in X_\omega$ sedemikian sehingga $v = Tv$ diperoleh

$$\begin{aligned}0 \precsim \omega_\lambda(v, u) &= \omega_\lambda(Tv, Tu) \\ &\precsim z[\omega_{2\lambda}(v, Tv) + \omega_{2\lambda}(u, Tu)] \\ &= z[\omega_{2\lambda}(v, v) + \omega_{2\lambda}(u, u)] \\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi, $\omega_\lambda(v, u) = 0$. Akibatnya, $u = v$. Dengan kata lain, titik tetap T tunggal.

Akibat 1: *Diberikan X_ω ruang metrik modular lengkap bernilai kompleks dan $z \in \mathbb{C}$ dengan $Im\, z = 0$ dan $|z| < \frac{1}{2}$. Jika $T: X_\omega \to X_\omega$ pemetaan yang memenuhi*

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \preccurlyeq z\big(\omega_{2\lambda}(Tx, x) + \omega_{2\lambda}(Ty, y)\big),$$

untuk setiap $\lambda > 0$ dan $x, y \in X_\omega$ maka T mempunyai titik tetap tunggal.

Pemetaan Chatterjea kompleks-ω

Definisi 6: *Pemetaan T disebut pemetaan Chatterjea kompleks-ω jika untuk setiap $\lambda > 0$ dan $x, y \in X_\omega$ berlaku*

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \preccurlyeq z\big(\omega_{2\lambda}(Tx, y) + \omega_{2\lambda}(Ty, x)\big),$$

untuk suatu $z \in \mathbb{C}$ dengan $|z| < \frac{1}{2}$.

Teorema 3: *Diberikan X_ω ruang metrik modular lengkap bernilai kompleks dan pemetaan $T: X_\omega \to X_\omega$. Jika T memenuhi pemetaan Chatterjea kompleks-ω maka T memiliki titik tetap tunggal.*

Bukti.

Diambil sebarang $x_0 \in X_\omega$. Untuk setiap $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ didefinisikan

$$T^0 x_0 = x_0 \; ; T^{n+1} x_0 = T(T^n x_0)$$

Selanjutnya, didefinisikan barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dengan

$$x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0$$

Karena T pemetaan Chatterjea kompleks-ω dan dengan menggunakan aksioma (M3) maka diperoleh

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) &= \omega_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n)\\ &\precsim z[\omega_{2\lambda}(Tx_{n-1}, x_n)\\ &+ \omega_{2\lambda}(Tx_n, x_{n-1})]\\ &= z[\omega_{2\lambda}(x_n, x_n)\\ &+ \omega_{2\lambda}(x_{n+1}, x_{n-1})]\\ &= z[\omega_{2\lambda}(x_{n+1}, x_{n-1})]\\ &\precsim z[\omega_\lambda(x_{n+1}, x_n)\\ &+ \omega_\lambda(x_n, x_{n-1})]\end{aligned}$$

Lebih lanjut dari ketaksamaan di atas diperoleh

$$(1 - z)\omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) \precsim z\omega_\lambda(x_{n-1}, x_n)$$
$$\Leftrightarrow \; \omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) \precsim \frac{z}{1 - z}\omega_\lambda(x_{n-1}, x_n)$$

Selanjutnya, secara induktif untuk setiap $n \in \{0,1,2, \dots \dots\}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) &\precsim \frac{z}{1 - z}\omega_\lambda(x_{n-1}, x_n)\\ &\precsim \left[\frac{z}{1 - z}\right]^2 \omega_\lambda(x_{n-2}, x_{n-1})\\ &\precsim \cdots\\ &\precsim \left[\frac{z}{1 - z}\right]^n \omega_\lambda(x_0, x_1)\\ &= \left[\frac{z}{1 - z}\right]^n \omega_\lambda(x_0, Tx_0).\end{aligned}$$

Jadi, $\omega_\lambda(Tx_n, Tx_{n+1}) \preccurlyeq \left[\frac{z}{1-z}\right]^n \omega_\lambda(x_0, Tx_0)$.

Ada dua kasus:

Kasus 1: Jika terdapat $n \in \{0,1,2, \dots \dots\}$ sehingga $x_n = x_0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(x_0, Tx_0) &= \omega_\lambda(x_n, Tx_n)\\ &= \omega_\lambda(x_n, x_{n+1})\\ &\precsim \left(\frac{z}{1 - z}\right)^n \omega_\lambda(x_0, Tx_0)\end{aligned}$$

Karena $|z| < \frac{1}{2}$ maka $0 < \left|\frac{z}{1-z}\right| < 1$. Akibatnya, $0 \prec \frac{z}{1-z} \prec 1$. Berdasarkan Lema 3 diperoleh

$$\omega_\lambda(x_0, Tx_0) = 0$$

Hal ini berarti, $x_0 = Tx_0$. Jadi, x_0 merupakan titik tetap T.

Kasus 2: Untuk setiap $n \in \{0,1,2, \dots \dots\}$ berlaku $x_n \neq x_0$.

Diambil sebarang $m, n \in \{0,1,2, \dots .\}$. Asumsikan $m > n$, maka $m = n + s$, untuk suatu $s \in \mathbb{N}$. Lebih lanjut diperoleh

$$\begin{aligned}
\omega_\lambda(x_n, x_m) &= \omega_\lambda(x_n, x_{n+s}) \\
&\preccurlyeq \omega_{\lambda/s}(x_n, x_{n+1}) \\
&+ \omega_{\lambda/s}(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots \\
&+ \omega_{\lambda/s}(x_{n+s-1}, x_{n+s}) \\
&\precsim \left(\frac{z}{1-z}\right)^n \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0) \\
&+ \left(\frac{z}{1-z}\right)^{n+1} \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0) \\
&+ \cdots \\
&+ \left(\frac{z}{1-z}\right)^{n+s-1} \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0) \\
&= \left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^n + \left(\frac{z}{1-z}\right)^{n+1} \right.\\
&+ \cdots \\
&\left. + \left(\frac{z}{1-z}\right)^{n+s-1}\right] \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0) \\
&= \left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^n \left[1 + \left(\frac{z}{1-z}\right) \right.\right.\\
&+ \cdots \\
&\left.\left. + \left(\frac{z}{1-z}\right)^{s-1}\right]\right] \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0) \\
&\precsim \left\{\left(\frac{z}{1-z}\right)^n \left[1 + \left(\frac{z}{1-z}\right) + \cdots \right.\right.\\
&+ \left(\frac{z}{1-z}\right)^{s-1} \\
&\left.\left. + \cdots\right]\right\} \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{z^n}{((1-z)^{n-1})(1-2z)}\right] \omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)$$

Dengan menggunakan sifat urutan parsial kompleks diperoleh

$$|\omega_\lambda(x_n, x_m)|$$

$$\leq \left|\frac{z^n}{((1-z)^{n-1})(1-2z)}\right| \left|\omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)\right|$$

Karena $|z| < \frac{1}{2}$ maka $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^n}{((1-z)^{n-1})(1-2z)}\right| = 0$. Jadi diperoleh

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |\omega_\lambda(x_n, x_m)|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^n}{((1-z)^{n-1})(1-2z)}\right| \left|\omega_{\lambda/s}(x_0, Tx_0)\right|$$

$$= 0$$

Jadi, $\lim_{n\to\infty} |\omega_\lambda(x_n, x_m)| = 0$. Dengan menggunakan Lema 2 diperoleh barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di X_ω. Karena X_ω ruang metrik modular lengkap bernilai kompleks, maka ada $u \in X_\omega$ sedemikian sehingga barisan $\{x_n\}$ konvergen ke u. Dengan kata lain, $\lim_{n\to\infty} \omega_\lambda(x_n, u) = 0$. Dengan menggunakan aksioma (M3) metrik modular kompleks dan karena T pemetaan Chatterjea kompleks-ω diperoleh

$$\begin{aligned}
\omega_\lambda(u, Tu) &\precsim \omega_{\lambda/2}(u, T^{n+1}u) \\
&+ \omega_{\lambda/2}(T^{n+1}u, Tu) \\
&\precsim \omega_{\lambda/2}(u, T^{n+1}u) \\
&+ z[\omega_\lambda(T^{n+1}u, u) \\
&+ \omega_\lambda(T^n u, Tu)] \\
&= \omega_{\lambda/2}(u, T^{n+1}u) \\
&+ z\omega_\lambda(T^{n+1}u, u) \\
&+ z\omega_\lambda(T^n u, Tu)
\end{aligned}$$

Karena $\{x_n\}$ konvergen ke u maka diperoleh

$$\omega_\lambda(u, Tu) \precsim z\omega_\lambda(u, Tu) \precsim 2z\omega_\lambda(u, Tu)$$

Karena $|z| < \frac{1}{2}$ maka $2|z| < 1$. Lebih lanjut, dengan menggunakan Lema 3 diperoleh

$$\omega_\lambda(u, Tu) = 0.$$

Dengan kata lain $Tu = u$. Jadi, u adalah titik tetap dari T.

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa titik tetap T tunggal. Asumsikan ada titik $v \in X_\omega$ sedemikian sehingga $v = Tv$ diperoleh

$$\begin{aligned} 0 \precsim \omega_\lambda(v, u) &= \omega_\lambda(Tv, Tu) \\ &\precsim z[\omega_{2\lambda}(u, Tv) \\ &\qquad + \omega_{2\lambda}(v, Tu)] \\ &= z[\omega_{2\lambda}(u, v) + \omega_{2\lambda}(v, u)] \\ &\precsim z[\omega_\lambda(u, u) + \omega_\lambda(u, v) \\ &\qquad + \omega_\lambda(v, v) \\ &\qquad + \omega_\lambda(v, u)] \\ &= z[\omega_\lambda(u, v) + \omega_\lambda(v, u)] \\ &= 2z\omega_\lambda(u, v) \end{aligned}$$

Karena $|z| < \frac{1}{2}$ maka $2|z| < 1$. Dengan menggunakan Lema 3 diperoleh $\omega_\lambda(v, u) = 0$. Jadi, $u = v$. Dengan kata lain, titik tetap T tunggal.

Akibat 2: *Diberikan X_ω ruang metrik modular lengkap bernilai kompleks dan $z \in \mathbb{C}$ dengan $Im\, z = 0$ dan $|z| < \frac{1}{2}$. Jika $T: X_\omega \to X_\omega$ pemetaan yang memenuhi*

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \preccurlyeq z\big(\omega_{2\lambda}(Tx, y) + \omega_{2\lambda}(Ty, x)\big),$$

untuk setiap $\lambda > 0$ dan $x, y \in X_\omega$ maka T mempunyai titik tetap tunggal.

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa pemetaan Kannan kompleks-ω

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \preccurlyeq z\big(\omega_{2\lambda}(Tx, x) + \omega_{2\lambda}(Ty, y)\big)$$

dan pemetaan Chatterjea kompleks- ω

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \preccurlyeq z\big(\omega_{2\lambda}(Tx, y) + \omega_{2\lambda}(Tx, y)\big),$$

untuk setiap $\lambda > 0$ dan $x, y \in X_\omega$ memiliki titik tetap tunggal di ruang metrik modular bernilai kompleks lengkap. Kondisi ini berlaku untuk suatu $z \in \mathbb{C}$ dengan $|z| < \frac{1}{2}$. Sebagai akibatnya, titik tetap untuk kedua pemetaan kontraktif kompleks- ω. tersebut tetap eksis dan tunggal untuk suatu $z \in \mathbb{C}$ dengan $|z| < \frac{1}{2}$ meskipun $Im\, z = 0$.

DAFTAR PUSTAKA

Abdou, A. A., & Khamsi, M. A. (2013). Fixed point results of pointwise contractions in modular metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, *2013*, 1-11. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-163

Aksoy, Ü., Karapınar, E., & Erhan, İ. M. (2017). Fixed point theorems in complete modular metric spaces and an application to anti-periodic boundary value problems. *Filomat*, *31*(17), 5475-5488. https://doi.org/10.2298/fil1717475a

Azam, A., Fisher, B., & Khan, M. (2011). Common fixed point theorems in complex valued metric spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, *32*(3), 243-253.

Chistyakov, V. V. (2006, January). Metric modulars and their application. In *Doklady Mathematics* (Vol. 73, pp. 32-35). Nauka/Interperiodica. https://doi.org/10.1134/S106456240601008X

Chistyakov, V, V. (2011). A fixed point theorem for contractions in modular metric spaces. e-Print, arXiv:1112.5561. 1–31.

https://doi.org/10.48550/arXiv.1112.5561

Ege, M. E., & Alaca, C. (2015). Fixed point results and an application to homotopy in modular metric spaces. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, *8*(6), 900-908. https://doi.org/10.22436/jnsa.008.06.01

Mongkolkeha, C., Sintunavarat, W., & Kumam, P. (2011). Fixed point theorems for contraction mappings in modular metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, *2011*(1), 1-9. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2011-93

Özkan, K., Gürdal, U., & Mutlu, A. (2021). Some fixed point theorems on complex valued modular metric spaces with an application. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, *70*(2), 690-701. https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.727771

Sitthikul, K., & Saejung, S. (2012). Some fixed point theorems in complex valued metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, *2012*(1), 1-11. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-189

Zhao, J., Zhao, Q., Jin, B., & Zhong, L. (2018). Fixed Point Results for Weakly C-Contraction Mapping in Modular Metric Spaces. *Open Access Library Journal*, *5*(1), 1-9. https://doi.org/10.4236/oalib.1104061